Rend. Sem. Mat. Univ. Pol. Torino
Vol. 73/2, 3–4 (2015), 227 – 243

F. Korichi

EXISTENCE ET UNICITÉ DE LA SOLUTION POUR UNE CLASSE D'ÉQUATIONS STOCHASTIQUES À COEFFICIENTS DÉFINIS PAR RAPPORT À UN ENSEMBLE FERMÉ DE TEMPS

Abstract. On considère une classe d'équations différentielles stochastiques dont les coefficients sont déterminés par des valeurs de processus inconnu, pas nécessairement au temps actuel, mais à un temps éventuellement antérieur appartenant à un sous-ensemble fermé de $\mathbb{R}_+$, c'est-à-dire, un type particulier d'équations stochastiques avec retards. On démontre l'existence et l'unicité de la solution de ces équations sous une condition un peu plus générale que celle de Lipschitz. On donne aussi un contre-exemple qui montre que la condition proposée est presque optimale.

1. Introduction

Les propriétés de la solution d'une équation stochastique avec retard – l'existence et l'unicité de la solution, le comportement asymptotique, la mesure invariante, etc ... – dépendent évidemment du type du retard considéré et sont assez variées (voir [2], [9], [8] pour ne citer que quelques-uns au sein d'une vaste littérature). Dans le présent travail nous allons considérer une classe particulière d'équations stochastiques avec retard, où le retard est défini par le "dernier instant appartenant à un ensemble fermé de $\mathbb{R}_+$".

Pour mieux préciser l'objectif de ce travail, nous considérons un sous-ensemble fermé I de $\mathbb{R}_+$ tel que

$$0 \in I \tag{1}$$

et définissons la fonction $\iota : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ par

$$\iota(t) = \sup\{s \leq t \,|\, s \in I\}. \tag{2}$$

On remarque que

$$\iota(t) \in I, \qquad \iota(t) \leq t \tag{3}$$

pour tout $t \in \mathbb{R}_+$.

Soient $f(x)$ et $\sigma(x)$ deux fonctions définies et continues sur $\mathbb{R}^n$ à valeurs dans $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}^{n\times l}$ respectivement. Soit $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{R}_+}, \mathbb{P})$ une base stochastique et $W(t)$ le mouvement brownien canonique à valeurs dans $\mathbb{R}^l$ adapté à la filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$. Alors l'équation que nous allons considérer peut s'écrire dans la forme

$$\xi(t) = \overline{\xi}_0 + \int_0^t f(\xi(\iota(s)))ds + \int_0^t \sigma(\xi(\iota(s)))dW(s), \tag{4}$$

où $\xi(t)$ est un processus stochastique inconnu à valeurs dans $\mathbb{R}^n$ et $\overline{\xi}_0$ est une variable aléatoire $\mathcal{F}_0$-mesurable à valeurs dans $\mathbb{R}^n$.

Dans le présent travail, nous considérons la classe des ensembles fermés $I \subset \mathbb{R}_+$ tels que, quel que soit $\bar{t} \in \mathbb{R}_+$, l'intersection $I \cap [0, \bar{t}]$ ait l'expression

$$I \cap [0, \bar{t}] = \Big(\bigcup_{m=0}^{\overline{m}-1} \Big(\bigcup_{k=0}^{\infty} [\alpha_k^m, \beta_k^m]\Big)\Big) \cup \Big(\bigcup_{k=0}^{\bar{k}} [\alpha_k^{\overline{m}}, \beta_k^{\overline{m}}]\Big), \qquad \overline{m} \in \mathbb{N},\ \ \bar{k} \in \mathbb{N}, \tag{5}$$

avec les relations

$$\alpha_k^m \leq \beta_k^m < \alpha_{k+1}^m \tag{6}$$

pour tout (m, k) intervenant dans l'expression du second membre de (5), et

$$\lim_{k\to\infty} \alpha_k^m = \lim_{k\to\infty} \beta_k^m = \alpha_0^{m+1} \tag{7}$$

pour tout $m \in \{0, 1, \cdots, \overline{m} - 1\}$. Il est clair que l'expression dans le second membre de (5) dépend de $\bar{t}$; si $\overline{m} = 0$, alors

$$\bigcup_{m=0}^{\overline{m}-1} \Big(\bigcup_{k=0}^{\infty} [\alpha_k^m, \beta_k^m]\Big) = \emptyset.$$

Pour généraliser la notion d'équation stochastique aux cas des ensembles fermés quelconques de $\mathbb{R}_+$, certains auteurs ont introduit de nouvelles définitions de l'intégrale stochastique (voir [11], [3], [6], [7], etc...). Mais si nous nous limitons à la classe d'ensembles fermés introduite ci-dessus, nous pouvons utiliser les méthodes classiques, qui nous semblent plus efficaces pour examiner les propriétés de l'équation et analyser le comportement de sa solution.

Nous rappelons d'autre part que, pour les équations stochastiques sur $\mathbb{R}_+$

$$\xi(t) = \overline{\xi}_0 + \int_0^t f(\xi(s))ds + \int_0^t \sigma(\xi(s))dW(s), \tag{8}$$

on connaît le résultat d'existence et d'unicité de la solution sous la condition

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^n} f(x) \cdot x\varphi'(|x|^2) < \infty \tag{9}$$

avec une fonction φ croissant infiniment, par exemple $\varphi(c) = \log(\log(e^2 + c))$ (voir par exemple [5] ainsi que la remarque après la démonstration du lemme 1). On rappelle que pour vérifier la condition (9), la fonction $f(x)$ peut être fortement non-linéaire et que la condition $f(x) \cdot x < 0$ pour x loin de l'origine constitue un élément de la stabilité de la solution (voir [4]).

L'objectif du présent article est de généraliser le résultat d'existence et d'unicité de la solution de l'équation (8) sous la condition (9) au cas d'équations du type (4) avec la condition

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^n} |f(x)||x|\varphi'(|x|^2) < \infty \tag{10}$$

(voir le théorème 2) et montrer que, contrairement au cas de la condition (9) pour (8), si la fonction $f(x)$ vérifie la condition (9) mais dépasse très légèrement la condition (10), cela peut causer la divergence de la solution des équations du type (4) dans un temps fini, comme nous allons l'illustrer par un contre-exemple.

Les résultats que nous allons montrer pourraient être généralisés à certaines classes assez générales d'équations du type

$$\xi(t) = \bar{\xi}_0 + \int_0^t f(\iota(s), \xi(\iota(s)))ds + \int_0^t \sigma(\iota(s), \xi(\iota(s)))dW(s). \tag{11}$$

Mais pour la clarté de l'exposé, dans ce qui suit nous nous limitons à considérer l'équation du type (4) où les fonctions $f(x)$ et $\sigma(x)$ ne dépendent pas de t.

2. Equation à coefficients lipschitziens

Dans ce qui suit nous supposons toujours que les fonctions $f(x)$ et $\sigma(x)$ sont au moins localement lipschitziennes. Sous cette condition, il résulte de la définition de $\iota(t)$ que, si $\eta = \eta(t)$ est un processus stochastique progressivement mesurable, alors $f(\eta(\iota(t)))$ et $\sigma(\eta(\iota(t)))$ le sont aussi, de sorte que l'intégrale stochastique

$$\int_0^t \sigma(\eta(\iota(s)))dW(s)$$

soit bien définie (pourvu que l'on puisse démontrer que l'intégrale ne diverge pas).

De l'équation (4) nous considérons d'abord le cas où $f(x)$ et $\sigma(x)$ sont globalement lipshitziennes dans $\mathbb{R}^n$. Dans ce cas on a le théorème suivant.

THÉORÈME 1. *On suppose que les fonctions $f(x)$ et $\sigma(x)$ sont lipshitziennes, c'est-à-dire qu'il existe une constante $L > 0$ telle que pour tout $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n$ on ait*

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leq L|x_1 - x_2| \qquad \textit{et} \qquad |\sigma(x_1) - \sigma(x_2)| \leq L|x_1 - x_2|.$$

Si la variable aléatoire $\bar{\xi}_0$ vérifie la relation $\mathbb{E}[|\bar{\xi}_0|^2] < \infty$, alors il existe une solution $\xi = \xi(t)$ de l'équation (4) *telle que, quel que soit $t > 0$, on ait*

$$\sup_{0 \leq s \leq t} \mathbb{E}[|\xi(s)|^2] < \infty.$$

La solution $\xi = \xi(t)$ est unique à une modification près.

Démonstration. Le théorème se démontre d'une manière analogue au cas du temps continu, c'est-à-dire, au cas $I = \mathbb{R}_+$. En effet, en définissant une suite d'approximations successives $\{\xi^{[q]}\}_{q=0}^{\infty}$ par

$$\xi^{[0]} = \bar{\xi}_0,$$

$$\xi^{[q+1]}(t) = \bar{\xi}_0 + \int_0^t f(\xi^{[q]}(\iota(s)))ds + \int_0^t \sigma(\xi^{[q]}(\iota(s)))dW(s),$$

on démontrera la convergence de cette suite comme dans le cas du temps continu (voir par exemple [10], [1]). □

3. Existence et unicité de la solution sous des conditions générales

Dans cette section, nous allons démontrer l'existence et l'unicité de la solution de l'équation (4) sous une condition un peu plus générale que celle de Lipschitz pour les fonctions $f(x)$ et $\sigma(x)$. Pour préciser cette condition, nous avons besoin d'introduire une classe de fonctions $\varphi(\cdot)$ définies sur $\mathbb{R}_+$ vérifiant les conditions

$$\varphi \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}_+), \qquad \varphi(0) > 0, \tag{12}$$

$$\varphi'(c) > 0 \qquad \forall\, c > 0, \tag{13}$$

$$\lim_{c\to\infty} \varphi(c) = \infty, \tag{14}$$

(15) il existe une constante $M_1 > 0$ telle que

i) $\sqrt{c}\,\varphi'(c)$ et $c\,|\varphi''(c)|$ soient décroissantes dans $[M_1^2, \infty[$,

ii) si $\overline{c} \geq M_1^2$, on ait $\varphi(c) \leq \varphi(\overline{c}) + \big(c - \overline{c}\big)\varphi'(\overline{c}), \quad \forall c \in [0, \overline{c}]$.

On a le résultat suivant d'existence et d'unicité.

THÉORÈME 2. *On suppose que les fonctions $f(x)$ et $\sigma(x)$ sont localement lipschitziennes et qu'il existe une fonction $\varphi(\cdot)$ vérifiant les conditions* (12)-(15) *ainsi que les relations*

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^n} |f(x)|\,|x|\,\varphi'(|x|^2) < \infty, \tag{16}$$

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^n} \sum_{i=1}^{n} \sum_{h=1}^{l} |\sigma_{ih}(x)|\,|x|\,\varphi'(|x|^2) < \infty, \tag{17}$$

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^n} \varphi'(|x|^2) \sum_{i=1}^{n} \sum_{h=1}^{l} (\sigma_{ih}(x))^2 < \infty, \tag{18}$$

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^n} |x|^2 |\varphi''(|x|^2)| \sum_{i,j=1}^{n} \Big| \sum_{h=1}^{l} \sigma_{ih}(x)\sigma_{jh}(x) \Big| < \infty, \tag{19}$$

$$\mathbb{E}\big[(\varphi(|\overline{\xi}_0|^2))\big] < \infty. \tag{20}$$

Alors il existe une solution de l'équation (4) *et une seule (à une modification près).*

Démonstration. Comme $f(x)$ et $\sigma(x)$ sont localement lipschitziennes, pour tout $N \in \mathbb{N}$ on peut construire les fonctions $f_N(x)$ et $\sigma_N(x)$ telles que

i) $f_N(x), \sigma_N(x)$ soient globalement lipschitziennes dans $\mathbb{R}^n$,

ii) $f_N(x) = f(x), \sigma_N(x) = \sigma(x)$ pour $x \in \mathbb{R}^n$, $|x| \leq N$,

iii) $f_N(x)$ et $\sigma_N(x)$ vérifient les conditions (16)-(19).

D'après le théorème 1, pour tout $N \in \mathbb{N}$, l'équation

$$\xi_N(t) = \bar{\bar{\xi}}_0 + \int_0^t f_N(\xi_N(\iota(s)))ds + \int_0^t \sigma_N(\xi_N(\iota(s)))dW(s) \tag{21}$$

admet une solution $\xi_N(t)$ et une seule. Donc il nous reste à démontrer que, quel que soit $t > 0$, on a

$$\mathbb{P}(\{ \sup_{0 \leq s \leq t} |\xi_N(s)| \geq N-1 \}) \to 0 \qquad \text{pour } N \to \infty. \tag{22}$$

En effet, la propriété (22) nous permettra de construire la solution $\xi(t)$ de l'équation (4) comme la limite des solutions approchées $\xi_N(t)$.

Pour éviter la confusion de notations, dans cette démonstration nous écrivons $\bar{t}$ au lieu de t. Rappelons d'abord que la condition (5) avec (6) et (7) nous permet de donner à $[0,\bar{t}]$ l'expression

$$[0,\bar{t}] = \bigcup_{(m,k) \in \mathcal{J}_{\bar{t}}} ([\alpha_k^m, \beta_k^m] \cup [\beta_k^m, \alpha_{k+1}^m]), \tag{23}$$

où $\mathcal{J}_{\bar{t}}$ est l'ensemble d'indices déterminé de telle sorte que $[0,\bar{t}] \cap I$ ait l'expression (5) et $\alpha_{\bar{k}+1}^{\overline{m}} = \bar{t} \geq \beta_{\bar{k}}^{\overline{m}}$ (on rappelle que $\beta_k^m < \alpha_{k+1}^m$ si $(m,k) \neq (\overline{m},\bar{k})$). Si on pose

$$\Phi(x) = \varphi(|x|^2), \tag{24}$$

en vertu de (6), (7) et (23), on a

$$\begin{aligned} \Phi(\xi_N(\bar{t})) &= \Phi(\bar{\bar{\xi}}_0) + \\ &+ \sum_{(m,k) \in \mathcal{J}_{\bar{t}}} (\Phi(\xi_N(\beta_k^m)) - \Phi(\xi_N(\alpha_k^m))) + \sum_{(m,k) \in \mathcal{J}_{\bar{t}}} (\Phi(\xi_N(\alpha_{k+1}^m)) - \Phi(\xi_N(\beta_k^m))). \end{aligned} \tag{25}$$

Pour chaque $\bar{r} \geq M_1$, on définit les fonctions $\widetilde{\Phi}_{\bar{r}}(\cdot)$ et $\Phi^+_{[\xi_N(\beta_k^m)]}(\cdot)$ par

$$\widetilde{\Phi}_{\bar{r}}(x) = \begin{cases} \varphi(|x|^2) & \text{si } |x| \geq \bar{r}, \\ \varphi(\bar{r}^2) + (|x|^2 - \bar{r}^2)\varphi'(\bar{r}^2) & \text{si } 0 \leq |x| < \bar{r}, \end{cases} \tag{26}$$

$$\Phi^+_{[\xi_N(\beta_k^m)]}(x) = \begin{cases} \widetilde{\Phi}_{\bar{r}}(x) \quad \text{avec } \bar{r} = |\xi_N(\beta_k^m)| & \text{si } |\xi_N(\beta_k^m)| \geq M_1, \\ \varphi(|x|^2) & \text{si } |\xi_N(\beta_k^m)| < M_1. \end{cases} \tag{27}$$

D'après la condition (15)(ii) et les définitions (24), (26) et (27) on a

$$\Phi(x) \leq \Phi^{+}_{[\xi_N(\beta^m_k)]}(x) \qquad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

En outre, on a

$$\Phi(\xi_N(\beta^m_k)) = \Phi^{+}_{[\xi_N(\beta^m_k)]}(\xi_N(\beta^m_k)).$$

On a donc

$$\Phi(\xi_N(\alpha^m_{k+1})) - \Phi(\xi_N(\beta^m_k)) \leq \Phi^{+}_{[\xi_N(\beta^m_k)]}(\xi_N(\alpha^m_{k+1})) - \Phi^{+}_{[\xi_N(\beta^m_k)]}(\xi_N(\beta^m_k)),$$

et par suite

$$\Phi(\xi_N(\bar{t})) \leq \Phi(\bar{\xi}_0) + \sum_{(m,k)\in \mathcal{J}_{\bar{t}}} (\Phi(\xi_N(\beta^m_k)) - \Phi(\xi_N(\alpha^m_k))) + \tag{28}$$

$$+ \sum_{(m,k)\in \mathcal{J}_{\bar{t}}} (\Phi^{+}_{[\xi_N(\beta^m_k)]}(\xi_N(\alpha^m_{k+1})) - \Phi^{+}_{[\xi_N(\beta^m_k)]}(\xi_N(\beta^m_k))).$$

Pour estimer $\Phi(\xi_N(\bar{t}))$, on utilise la formule d'Itô appliquée à $\Phi(\xi_N(t))$ dans les intervalles $[\alpha^m_k, \beta^m_k]$ et appliquée à $\Phi^{+}_{[\xi_N(\beta^m_k)]}(\xi_N(t)))$ dans les intervalles $[\beta^m_k, \alpha^m_{k+1}]$. On a

$$\Phi(\xi_N(t)) - \Phi(\xi_N(\alpha^m_k)) = \int_{\alpha^m_k}^{t} I_1(s)ds + \int_{\alpha^m_k}^{t} \sum_{h=1}^{l} I_2^{(h)}(s)dW^{(h)}(s) \tag{29}$$

pour $\alpha^m_k \leq t \leq \beta^m_k$, et

$$\Phi^{+}_{[\xi_N(\beta^m_k)]}(\xi_N(t)) - \Phi^{+}_{[\xi_N(\beta^m_k)]}(\xi_N(\beta^m_k)) = \int_{\beta^m_k}^{t} \widetilde{I}_1(s)ds + \int_{\beta^m_k}^{t} \sum_{h=1}^{l} \widetilde{I}_2^{(h)}(s)dW^{(h)}(s) \tag{30}$$

pour $\beta^m_k \leq t \leq \alpha^m_{k+1}$, où

$$I_1(s) = \sum_{j=1}^{n} f_j(\xi_N(s))\partial_{x_j}\Phi(\xi_N(s)) + \tag{31}$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n}\sum_{h=1}^{l} \sigma_{ih}(\xi_N(s))\sigma_{jh}(\xi_N(s))\partial_{x_i}\partial_{x_j}\Phi(\xi_N(s)),$$

$$I_2^{(h)}(s) = \sum_{j=1}^{n} \sigma_{jh}(\xi_N(s))\partial_{x_j}\Phi(\xi_N(s)), \tag{32}$$

$$\widetilde{I}_1(s) = \sum_{j=1}^{n} f_j(\xi_N(\beta^m_k))\partial_{x_j}\Phi^{+}_{[\xi_N(\beta^m_k)]}(\xi_N(s)) + \tag{33}$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n}\sum_{h=1}^{l}\sigma_{ih}(\xi_N(\beta_k^m))\sigma_{jh}(\xi_N(\beta_k^m))\partial_{x_i}\partial_{x_j}\Phi^+_{[\xi_N(\beta_k^m)]}(\xi_N(s)),$$

(34)
$$\widetilde{I}_2^{(h)}(s)=\sum_{j=1}^{n}\sigma_{jh}(\xi_N(\beta_k^m))\partial_{x_j}\Phi^+_{[\xi_N(\beta_k^m)]}(\xi_N(s)).$$

On définit les processus stochastiques $G_1(t)$, $G_2^{(h)}(t)$, $h=1,\cdots,l$, par

(35)
$$G_1(t)=\begin{cases} I_1(t) & \text{pour } \alpha_k^m\le t\le\beta_k^m,\\ \widetilde{I}_1(t) & \text{pour } \beta_k^m\le t\le\alpha_{k+1}^m,\end{cases}$$

(36)
$$G_2^{(h)}(t)=\begin{cases} I_2^{(h)}(t) & \text{pour } \alpha_k^m\le t\le\beta_k^m,\\ \widetilde{I}_2^{(h)}(t) & \text{pour } \beta_k^m\le t\le\alpha_{k+1}^m.\end{cases}$$

On remarque que les processus $G_1(t)$ et $G_2^{(h)}(t)$ sont progressivement mesurables. Les relations (28)-(36) nous donnent

(37)
$$\Phi(\xi_N(\bar t))\le\Phi(\bar\xi_0)+\int_0^{\bar t}G_1(t)dt+\int_0^{\bar t}\sum_{h=1}^{l}G_2^{(h)}(t)dW^{(h)}(t).$$

On a en outre le lemme suivant.

LEMME 1. *Il existe une constante $C_1>0$ telle que*

$$G_1(t)\le C_1,\qquad |G_2^{(h)}(t)|\le C_1,\quad h=1,\cdots,l,\qquad \forall t\ge 0.$$

Comme sa démonstration exige des calculs assez longs, en la renvoyant à la section suivante, nous continuons la démonstration du théorème 2 avec le lemme 1 supposé démontré.

Continuation de la démonstration du théorème 2: Du lemme 1 il résulte immédiatement que

(38)
$$\sup_{0\le t\le\bar t}\int_0^t G_1(s)ds\le C_1\bar t.$$

D'autre part, en utilisant l'inégalité de Doob et le lemme 1, on a

(39)
$$\mathbb{E}\Big[\sup_{0\le t\le\bar t}\int_0^t\sum_{h=1}^{l}G_2^{(h)}(s)dW^{(h)}(s)\Big]\le$$

$$\le\Big(\mathbb{E}\Big[\sup_{0\le t\le\bar t}\int_0^t\sum_{h=1}^{l}G_2^{(h)}(s)dW^{(h)}(s)\Big]^2\Big)^{\frac12}\le 2\Big(\mathbb{E}\Big[\int_0^{\bar t}\sum_{h=1}^{l}G_2^{(h)}(s)dW^{(h)}(s)\Big]^2\Big)^{\frac12}\le$$

$$\leq 2\Big(\mathbb{E}\Big[l\int_0^{\bar{t}}\sum_{h=1}^{l}(G_2^{(h)}(s))^2ds\Big]\Big)^{\frac{1}{2}} \leq 2C_1 l\sqrt{\bar{t}}.$$

Comme

$$\sup_{0\leq t\leq \bar{t}} \Phi(\xi_N(t)) \leq \Phi(\bar{\xi}_0) + \sup_{0\leq t\leq \bar{t}}\int_0^t G_1(s)ds + \sup_{0\leq t\leq \bar{t}}\int_0^t \sum_{h=1}^{l} G_2^{(h)}(s)dW^{(h)}(s),$$

d'après (38)-(39) on obtient

$$\mathbb{E}\Big[\sup_{0\leq t\leq \bar{t}} \Phi(\xi_N(t))\Big] \leq \mathbb{E}[(\Phi(|\bar{\xi}_0|^2))] + C_1(\bar{t}+2l\sqrt{\bar{t}}).$$

Par conséquent, on a

$$\mathbb{P}(\{\sup_{0\leq s\leq t}|\xi_N(s)| \geq N-1\}) = \mathbb{P}(\{\sup_{0\leq s\leq t}\Phi(|\xi_N(s)|^2) \geq \Phi((N-1)^2)\}) \leq$$

$$\leq \frac{\mathbb{E}[(\Phi(|\bar{\xi}_0|^2))] + C_1(t+2l\sqrt{t})}{\Phi((N-1)^2)}.$$

Comme $\Phi((N-1)^2) \to \infty$ pour $N \to \infty$, de manière usuelle on déduit l'existence et l'unicité de la solution de l'équation (4). Le théorème est démontré.

□

Voici une conséquence immédiate du théorème.

COROLLAIRE 1. *Supposons que $f(x)$ et $\sigma(x)$ sont localement lipschitziennes. S'il existe une constante K_1 telle que*

(40) $$\sup_{x\in\mathbb{R}^n}|f(x)||x| \leq K_1(e^2+|x|^2)\log(e^2+|x|^2),$$

(41) $$\sup_{x\in\mathbb{R}^n}\sup_{i=1,\dots,n,h=1,\cdots,l}|\sigma_{ih}(x)|\,|x| \leq K_1(e^2+|x|^2)\sqrt{\log(e^2+|x|^2)},$$

et si $\mathbb{E}\big[(\log(\log(e^2+|\bar{\xi}_0|^2)))\big] < \infty$, alors l'équation (4) *admet une solution et une seule (à une modification près).*

Démonstration. Pour le démontrer, il suffit de prendre

$$\varphi(c) = \log(\log(e^2+c)).$$

En effet, par des calculs élémentaires, on constate que $\varphi(c)$ vérifie les conditions (12)-(15) et que les conditions (40)-(41) entraînent (16)-(19). Donc, d'après le théorème 2, il existe une solution de l'équation et une seule (à une modification près).

□

De plus, on voit facilement que, au lieu des conditions (40)-(41), on peut poser des conditions plus faibles correspondantes aux fonctions $\varphi(c) = \log(\log(\log(A+c)))$ ou $\varphi(c) = \log(\log(\log(\log(A+c))))$, etc...

4. Démonstration du lemme 1

On va démontrer le lemme 1.

Démonstration. Comme dans la démonstration du lemme 1 nous avons besoin de plusieurs constantes positives dans de différentes inégalités sans toutefois utiliser leur valeur spécifique, dans cette démonstration, pour simplifier la notation, nous allons désigner simplement par C ces constantes, qui sont généralement différentes l'une de l'autre.

On va d'abord démontrer que la fonction G_1 est bornée sur les intervalles $[\alpha_k^m, \beta_k^m]$. On rappelle que, d'après les définitions (25), (31), (35), on a

$$G_1(t) = I_1(t) = 2\sum_{j=1}^{n} f_j(\xi_N(t))\xi_{Nj}(t)\varphi'(|\xi_N(t)|^2)+$$

$$+\sum_{i,j=1}^{n}\sum_{h=1}^{l}\sigma_{ih}(\xi_N(t))\sigma_{jh}(\xi_N(t))[\delta_{ij}\varphi'(|\xi_N(t)|^2)+2\xi_{Ni}(t)\xi_{Nj}(t)\varphi''(|\xi_N(t)|^2)].$$

Donc, en vertu des conditions (16), (18) et (19), il existe une constante positive C telle que

$$G_1(t) \le C \qquad \forall t \in [\alpha_k^m, \beta_k^m],\ \forall (m,k) \in \mathcal{I}_{\overline{t}}. \tag{42}$$

Pour $t \in [\beta_k^m, \alpha_{k+1}^m]$, il faut distinguer le cas $|\xi_N(\beta_k^m)| < M_1$ du cas $|\xi_N(\beta_k^m)| \ge M_1$.

Dans le cas $|\xi_N(\beta_k^m)| < M_1$, d'après les définitions (27), (33), (35), on a

$$G_1(t) = \widetilde{I}_1(t) = 2\sum_{j=1}^{n} f_j(\xi_N(\beta_k^m))\xi_{Nj}(t)\varphi'(|\xi_N(t)|^2)+$$

$$+\sum_{i,j=1}^{n}\sum_{h=1}^{l}\sigma_{ih}(\xi_N(\beta_k^m))\sigma_{jh}(\xi_N(\beta_k^m))[\delta_{ij}\varphi'(|\xi_N(t)|^2)+2\xi_{Ni}(t)\xi_{Nj}(t)\varphi''(|\xi_N(t)|^2)].$$

Or, comme $f(x)$ et $\sigma(x)$ sont continues, il existe une constante positive C' telle que

$$|f_j(x)| \le C' \quad \forall |x| \le M_1,\ j = 1,\cdots,n,$$

$$|\sigma_{jh}(x)| \le C' \quad \forall |x| \le M_1,\ j = 1,\cdots,n,\ h = 1,\cdots,l.$$

En particulier, on a

$$|f_j(\xi_N(\beta_k^m))| \le C', \qquad |\sigma_{jh}(\xi_N(\beta_k^m))| \le C'.$$

D'autre part, la condition (15)(i) (voir aussi (12)) implique que $|x|\varphi'(|x|^2)$ et $|x|^2|\varphi''(|x|^2)|$ sont uniformément bornées dans $\mathbb{R}^n$. On en déduit qu'il existe une constante C telle que

$$G_1(t) \le C \qquad \forall t \in [\beta_k^m, \alpha_{k+1}^m],\ \text{ si } |\xi_N(\beta_k^m)| < M_1. \tag{43}$$

Dans le cas $|\xi_N(\beta_k^m)| \geq M_1$, si $|\xi_N(t)| \geq |\xi_N(\beta_k^m)|$, alors d'après les définitions (26), (27), (33), (35), on a

$$G_1(t) = \widetilde{I}_1(t) = 2\sum_{j=1}^{n} f_j(\xi_N(\beta_k^m))\xi_{Nj}(t)\varphi'(|\xi_N(t)|^2) +$$

$$+\sum_{i,j=1}^{n}\sum_{h=1}^{l}\sigma_{ih}(\xi_N(\beta_k^m))\sigma_{jh}(\xi_N(\beta_k^m))[\delta_{ij}\varphi'(|\xi_N(t)|^2)+2\xi_{Ni}(t)\xi_{Nj}(t)\varphi''(|\xi_N(t)|^2)]$$

(formellement on a la même expression que dans le cas précédent) et en vertu de la condition (15)(i) on a

$$|\xi_N(t)|\varphi'(|\xi_N(t)|^2) \leq |\xi_N(\beta_k^m)|\varphi'(|\xi_N(\beta_k^m)|^2), \qquad \varphi'(|\xi_N(t)|^2) \leq \varphi'(|\xi_N(\beta_k^m)|^2),$$

$$|\xi_N(t)|^2|\varphi''(|\xi_N(t)|^2)| \leq |\xi_{Ni}(\beta_k^m)|^2|\varphi''(|\xi_N(\beta_k^m)|^2)|.$$

Donc, en vertu des conditions (16), (18), (19), on a

$$G_1(t) \leq C,$$

où C est une constante positive.

D'autre part, dans le cas où $|\xi_N(\beta_k^m)| \geq M_1$ et $|\xi_N(t)| < |\xi_N(\beta_k^m)|$, on remarque d'abord que d'après les définitions (26)-(27) on a

$$\partial_{x_j}\Phi^+_{[\xi_N(\beta_k^m)]}(\xi_N(t)) = 2\xi_{Nj}(t)\varphi'(|\xi_N(\beta_k^m)|^2),$$

$$\partial_{x_i}\partial_{x_j}\Phi^+_{[\xi_N(\beta_k^m)]}(\xi_N(t)) = 2\delta_{ij}\varphi'(|\xi_N(\beta_k^m)|^2).$$

On a donc

$$\Big|\sum_{j=1}^{n} f_j(\xi_N(\beta_k^m))\partial_{x_j}\Phi^+_{[\xi_N(\beta_k^m)]}(\xi_N(s))\Big| \leq 2|f(\xi_N(\beta_k^m))|\,|\xi_N(\beta_k^m)|\,\varphi'(|\xi_N(\beta_k^m)|^2),$$

$$\Big|\sum_{i,j=1}^{n}\sum_{h=1}^{l}\sigma_{ih}(\xi_N(\beta_k^m))\sigma_{jh}(\xi_N(\beta_k^m))\partial_{x_i}\partial_{x_j}\Phi^+_{[\xi_N(\beta_k^m)]}(\xi_N(s))\Big| \leq$$

$$\leq 2\sum_{i=1}^{n}\sum_{h=1}^{l}|\sigma_{ih}(\xi_N(\beta_k^m))|^2\varphi'(|\xi_N(\beta_k^m)|^2),$$

ce qui, compte tenu des conditions (16) et (18) et de l'expression (33) de $\widetilde{I}_1(t)$, implique qu'il existe une constante C telle que

$$G_1(t) \leq C.$$

En combinant les résultats des deux cas, on obtient

$$G_1(t) \leq C \qquad \forall t \in [\beta_k^m, \alpha_{k+1}^m], \ \text{ si } |\xi_N(\beta_k^m)| \geq M_1. \tag{44}$$

De (43) et (44) on déduit qu'il existe une constante C telle que

$$G_1(t) \le C \qquad \forall t \in [\beta_k^m, \alpha_{k+1}^m],\ \forall (m,k) \in \mathcal{J}_{\bar{t}},$$

ce qui, joint à (42), donne

$$G_1(t) \le C_1 \qquad \forall t \ge 0 \tag{45}$$

avec une constante positive C.

Examinons maintenant $|G_2^{(h)}(t)|, h = 1, \cdots, l$. Comme dans les intervalles $[\alpha_k^m, \beta_k^m]$, on a

$$G_2^{(h)}(t) = I_2^{(h)}(t) = \sum_{j=1}^{n} \sigma_{jh}(\xi_N(t))\xi_{Nj}(t)\varphi'(|\xi_N(t)|^2),$$

de (17) on déduit immédiatement qu'il existe une constante positive C telle que

$$|G_2^{(h)}(t)| \le C \qquad \forall t \in [\alpha_k^m, \beta_k^m],\ \forall (m,k) \in \mathcal{J}_{\bar{t}}. \tag{46}$$

Pour $t \in [\beta_k^m, \alpha_{k+1}^m]$, si $|\xi_N(\beta_k^m)| < M_1$, on a

$$G_2^{(h)}(t) = \widetilde{I}_2^{(h)}(t) = 2\sum_{j=1}^{n} \sigma_{jh}(\xi_N(\beta_k^m))\xi_{Nj}(t)\varphi'(|\xi_N(t)|^2).$$

Or, comme on l'a remarqué plus haut, on a $|\sigma_{jh}(x)| \le C'$ pour $|x| \le M_1$ et que, en vertu de la condition (15)(i), $|x|\varphi'(|x|^2)$ est uniformément bornée dans $\mathbb{R}^n$, on a l'inégalité

$$|G_2^{(h)}(t)| \le C \qquad \forall t \in [\beta_k^m, \alpha_{k+1}^m],\ \text{ si } |\xi_N(\beta_k^m)| < M_1 \tag{47}$$

avec une constante positive C.

Si $|\xi_N(\beta_k^m)| \ge M_1$ et si $|\xi_N(t)| \ge |\xi_N(\beta_k^m)|$, la fonction $G_2^{(h)}(t)$ a formellement la même expression que dans le cas $|\xi_N(\beta_k^m)| < M_1$ et, en vertu de la condition (15)(i), on a

$$|G_2^{(h)}(t)| \le 2\sum_{j=1}^{n} |\sigma_{jh}(\xi_N(\beta_k^m))|\,|\xi_N(t)|\,\varphi'(|\xi_N(t)|^2) \le$$

$$\le 2\sum_{j=1}^{n} |\sigma_{jh}(\xi_N(\beta_k^m))|\,|\xi_N(\beta_k^m)|\,\varphi'(|\xi_N(\beta_k^m)|^2).$$

Par conséquent, en vertu de la condition (17), il existe une constante positive C telle que

$$|G_2^{(h)}(t)| \le C.$$

Si $|\xi_N(\beta_k^m)| \ge M_1$ et si $|\xi_N(t)| < |\xi_N(\beta_k^m)|$, comme nous l'avons remarqué précédemment, on a $\partial_{x_j}\Phi^+_{[\xi_N(\beta_k^m)]}(\xi_N(t)) = 2\xi_{Nj}(t)\varphi'(|\xi_N(\beta_k^m)|^2)$ et donc d'après (34) on a

$$|G_2^{(h)}(t)| \le 2\sum_{j=1}^{n} |\sigma_{jh}(\xi_N(\beta_k^m))|\,|\xi_N(t)|\varphi'(|\xi_N(\beta_k^m)|^2) \le$$

$$\leq 2\sum_{j=1}^{n} |\sigma_{jh}(\xi_N(\beta_k^m))|\,|\xi_N(\beta_k^m)|\varphi'(|\xi_N(\beta_k^m)|^2),$$

ce qui, joint à (17), nous donne

$$|G_2^{(h)}(t)| \leq C$$

avec une constante positive C.

Ayant examiné les deux cas, on en déduit qu'il existe une constante positive C telle que

$$(48) \qquad |G_2^{(h)}(t)| \leq C \qquad \forall t \in [\beta_k^m, \alpha_{k+1}^m], \ \text{ si } |\xi_N(\beta_k^m)| \geq M_1.$$

En combinant (47) et (48), on obtient

$$|G_2^{(h)}(t)| \leq C \qquad \forall t \in [\beta_k^m, \alpha_{k+1}^m],\ \forall (m,k) \in \mathcal{J}_T.$$

Cette relation, jointe à (46), nous donne

$$(49) \qquad |G_2^{(h)}(t)| \leq C \qquad \forall t \geq 0$$

avec une constante positive C_1, ce qui achève la démonstration du lemme 1.

□

On remarque que pour obtenir l'inégalité (42) il a suffi d'avoir pour $f(x)$ la condition

$$(50) \qquad \sup_{x\in\mathbb{R}^n} f(x)\cdot x\varphi'(|x|^2) < \infty$$

au lieu de (16). Donc dans le cas où $I = \mathbb{R}_+$, pour démontrer le théorème 2, la condition (16) peut être remplacée par (50).

5. Contre-exemple

La condition dans le corollaire précédent est presque optimale dans le sens où, pour la fonction $f(x) = -x(\log(1\vee|x|))^{1+\varepsilon}$ avec $\varepsilon > 0$ ($a\vee b = \max(a,b)$), il existe un sous-ensemble fermé de $\mathbb{R}_+$ tel que les conditions (5)-(7) soient vérifiées et que la solution de l'équation (4) puisse diverger dans un temps fini, comme on le verra dans le contre-exemple suivant.

Considérons l'équation stochastique

$$(51) \qquad \xi(t) = \overline{\xi}_0 - \int_0^t \xi(\iota(s))(\log(1\vee|\xi(\iota(s))|))^{1+\varepsilon}ds + W(t)$$

pour un processus stochastique inconnu $\xi(t)$ à valeurs dans $\mathbb{R}$; dans (51) ε est une constante strictement positive et $\overline{\xi}_0$ est une variable aléatoire à valeurs réelles. Il s'agit d'un cas particulier de l'équation (4) avec

$$f(x) = -x(\log(1\vee|x|))^{1+\varepsilon}, \qquad \sigma(x) = 1, \qquad x\in\mathbb{R}.$$

Nous allons choisir un ensemble fermé I particulier. On définit une suite de nombres positifs t_k, $k = 0, 1, 2, \cdots$, par

$$t_0 = 0, \qquad t_k = \sum_{q=1}^{k} \frac{e+2}{q^{1+\varepsilon}} \quad (k = 1, 2, \cdots). \tag{52}$$

Il est clair que

$$t_{k+1} > t_k \qquad \forall k \in \mathbb{N}. \tag{53}$$

D'autre part, comme

$$\lim_{k\to\infty} t_k < \infty, \tag{54}$$

si on pose

$$t_\infty = \lim_{k\to\infty} t_k,$$

alors l'ensemble

$$I_1 = \bigcup_{k=0}^{\infty} \{t_k\} \cup \{t_\infty\} \tag{55}$$

est un ensemble fermé contenu dans $\mathbb{R}_+$ vérifiant les conditions (5), (6), (7) avec

$$\overline{m} = 1, \quad \overline{k} = 0, \quad a_k^0 = b_k^0 = t_k, \quad a_0^1 = b_0^1 = t_\infty.$$

Pour simplifier les notations, on pose $\xi_k = \xi(t_k)$. On a le lemme suivant.

LEMME 2. *L'équation* (51) *admet une solution* $\xi(t)$ *et une seule dans tout l'intervalle* $[0, \bar{t}]$ *avec* $0 \leq \bar{t} < t_\infty$. *En outre, on a*

$$\xi_{k+1} = \xi_k \Big(1 - \frac{e+2}{(k+1)^{1+\varepsilon}} (\log(1 \vee |\xi_k|))^{1+\varepsilon}\Big) + W(t_{k+1}) - W(t_k), \tag{56}$$

pour tout $k \in \mathbb{N}$.

Démonstration. Pour les variables aléatoires $\mathcal{F}_{t_k}$-mesurables X à valeurs réelles et pour $t_k \leq t \leq t_{k+1}$ on définit

$$F_t^{[k]}(X) = X(1 - (t - t_k)(\log(1 \vee |X|))^{1+\varepsilon}) + W(t) - W(t_k). \tag{57}$$

Il est clair que $F_t^{[k]}(X)$ sera $\mathcal{F}_t$-mesurable (pour $t_k \leq t \leq t_{k+1}$). Comme $F_t^{[k]}(X)$ est bien définie pour $t_k \leq t \leq t_{k+1}$ et pour $k = 0, 1, 2, \cdots$, si $0 \leq t < t_\infty$, en effectuant un nombre fini d'opérations, on peut définir

$$\xi(t) = F_t^{[k^*]} \circ F_{t_{k^*}}^{[k^*-1]} \circ \cdots \circ F_{t_3}^{[2]} \circ F_{t_2}^{[1]} \circ F_{t_1}^{[0]}(\overline{\xi}_0), \qquad k^* = \max\{k \in \mathbb{N} | t_k \leq t\}, \tag{58}$$

qui est la solution de l'équation (51) dans $[0, t_\infty[$.

D'autre part, comme

$$t_{k+1} - t_k = \frac{e+2}{(k+1)^{1+\varepsilon}}, \qquad \text{pour} \quad k = 0,1,2,\cdots \tag{59}$$

(voir (52)), de (57) avec $F^{[k]}_{t_{k+1}}(\xi_k) = \xi(t_{k+1}) = \xi_{k+1}$ on déduit (56).

□

Posons

$$y_k = e^{k+1}(-1)^k \qquad \text{pour } k \in \mathbb{N}. \tag{60}$$

On a alors

$$y_k = y_{k-1}\big(2 - \frac{e+2}{k^{1+\varepsilon}}(\log(|y_{k-1}|)^{1+\varepsilon})\big) \qquad \text{pour } k \in \mathbb{N}\backslash\{0\}. \tag{61}$$

Rappelons quelques relations entre ξ_k et y_k. Pour cela, posons

$$\mathrm{sgn}(a) = 1, \quad \text{si } a > 0; \qquad \mathrm{sgn}(a) = 0, \quad \text{si } a = 0; \qquad \mathrm{sgn}(a) = -1, \quad \text{si } a < 0.$$

LEMME 3. *Si $sgn(y_{k-1})x \geq |y_{k-1}|$, alors on a*

$$\mathbb{P}(\{sgn(y_k)\xi_k \geq |y_k| \,|\, \xi_{k-1} = x\}) \geq \mathbb{P}(\{sgn(y_k)\xi_k \geq |y_k| \,|\, \xi_{k-1} = y_{k-1}\}). \tag{62}$$

Démonstration. Comme pour le cas $\mathrm{sgn}(y_{k-1}) = -1$, c'est-à-dire $y_{k-1} < 0$, on peut raisonner de la même manière que dans le cas $\mathrm{sgn}(y_{k-1}) = 1$, c'est-à-dire $y_{k-1} > 0$, nous démontrons avec les détails seulement pour le cas $y_{k-1} > 0$. En vertu de la condition $x \geq y_{k-1} = e^k$ on a

$$1 - \frac{e+2}{k^{1+\varepsilon}}(\log x)^{1+\varepsilon} \leq 1 - \frac{e+2}{k^{1+\varepsilon}}(\log y_{k-1})^{1+\varepsilon} = -(e+1),$$

ce qui entraîne

$$x\Big(1 - \frac{e+2}{k^{1+\varepsilon}}(\log x)^{1+\varepsilon}\Big) \leq y_{k-1}\Big(1 - \frac{e+2}{k^{1+\varepsilon}}(\log y_{k-1})^{1+\varepsilon}\Big) = -e^k(e+1) \leq -e^{k+1} = y_k.$$

Par suite, de l'expression de (56) (avec k au lieu de $k+1$) on déduit que

$$\mathbb{P}(\{\xi_k \leq y_k \,|\, \xi_{k-1} = x\}) \geq \mathbb{P}(\{\xi_k \leq y_k \,|\, \xi_{k-1} = y_{k-1}\}). \tag{63}$$

De manière analogue, si $y_{k-1} < 0$ et si $x \leq y_{k-1}$, alors on obtient

$$\mathbb{P}(\{\xi_k \geq y_k \,|\, \xi_{k-1} = x\}) \geq \mathbb{P}(\{\xi_k \geq y_k \,|\, \xi_{k-1} = y_{k-1}\}). \tag{64}$$

De ces deux relations on déduit (62).

□

LEMME 4. *On a*

$$\mathbb{P}(\{sgn(y_{k-1})\xi_k > sgn(y_{k-1})y_k \,|\, \xi_{k-1} = y_{k-1}\}) \leq \frac{2\sqrt{e+2}}{\sqrt{2\pi}e^k k^{(1+\varepsilon)/2}} e^{-\frac{e^{2k}k^{1+\varepsilon}}{2(e+2)}}. \tag{65}$$

Démonstration. Comme pour le cas $y_{k-1} < 0$ on peut raisonner de la même manière que dans le cas $y_{k-1} > 0$, nous démontrons avec les détails seulement pour le cas $y_{k-1} > 0$.

De (56) et de (61), on déduit que sur l'évènement $\{\xi_{k-1} = y_{k-1}\}$, on a

$$\xi_k - y_k = -y_{k-1} + W(t_k) - W(t_{k-1}),$$

ce qui entraîne que $\xi_k > y_k$ si et seulement si

$$W(t_k) - W(t_{k-1}) > y_{k-1} = e^k.$$

On a donc

$$\mathbb{P}(\{\xi_k > y_k \,|\, \xi_{k-1} = y_{k-1}\}) = \int_{e^k}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi(t_k - t_{k-1})}} e^{-\frac{x^2}{2(t_k - t_{k-1})}} dx \leq$$

$$\leq \int_{e^k}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi(t_k - t_{k-1})}} e^{-\frac{e^k x}{2(t_k - t_{k-1})}} dx = \frac{2\sqrt{t_k - t_{k-1}}}{\sqrt{2\pi}e^k} e^{-\frac{e^{2k}}{2(t_k - t_{k-1})}}.$$

Si $y_{k-1} < 0$, de façon analogue on obtient

$$\mathbb{P}(\{\xi_k < y_k \,|\, \xi_{k-1} = y_{k-1}\}) \leq \frac{2\sqrt{t_k - t_{k-1}}}{\sqrt{2\pi}e^k} e^{-\frac{e^{2k}}{2(t_k - t_{k-1})}}.$$

Comme en vertu de (59) on a

$$\frac{2\sqrt{t_k - t_{k-1}}}{\sqrt{2\pi}e^k} e^{-\frac{e^{2k}}{2(t_k - t_{k-1})}} = \frac{2\sqrt{e+2}}{\sqrt{2\pi}e^k k^{(1+\varepsilon)/2}} e^{-\frac{e^{2k}k^{1+\varepsilon}}{2(e+2)}},$$

on en déduit (65).

□

Ayant établi les inégalités nécessaires, nous allons montrer que la solution $\xi(t)$ peut diverger dans un temps fini.

PROPOSITION 1. *Si* $\mathbb{P}(\{|\xi(0)| \geq e\}) = \mathbb{P}(\{|\xi_0| \geq e\}) > 0$*, alors avec une probabilité strictement positive la solution* $\xi(t)$ *de l'équation* (51) *avec* $I = I_1$ *définie dans* (55) *diverge quand* $t \to t_\infty$.

Démonstration. Pour démontrer la proposition, il suffit de montrer que

$$\inf_{k \in \mathbb{N}} \mathbb{P}(\{|\xi_k| \geq |y_k|\}) > 0. \tag{66}$$

Comme l'hypothèse $\mathbb{P}(\{|\xi_0| \geq e\}) > 0$ implique que $\mathbb{P}(\{\xi_0 \geq e\}) > 0$ ou $\mathbb{P}(\{\ \xi_0\ \leq\ -e\}) > 0$, nous commençons par le cas $\mathbb{P}(\{\xi_0 \geq e\}) > 0$.

On remarque que pour $k \geq 1$ on a

$$\mathbb{P}(\{|\xi_k| \geq |y_k|\}) \geq \mathbb{P}(\{\ \mathrm{sgn}(y_k)\xi_k \geq |y_k|\}) \leq$$
$$\geq \mathbb{P}(\{\mathrm{sgn}(y_k)\xi_k \geq |y_k|\} \cap \{\mathrm{sgn}(y_{k-1})\xi_{k-1} \geq |y_{k-1}|\}).$$

D'autre part, en vertu du lemme 3, on a

$$\mathbb{P}\big(\{\mathrm{sgn}(y_k)\xi_k \geq |y_k|\} \cap \{\mathrm{sgn}(y_{k-1})\xi_{k-1} \geq |y_{k-1}|\}\big) \geq$$
$$\geq \mathbb{P}(\{\mathrm{sgn}(y_{k-1})\xi_{k-1} \geq |y_{k-1}|\})\mathbb{P}(\{\mathrm{sgn}(y_k)\xi_k \geq |y_k|\,|\,\xi_{k-1} = y_{k-1}\}).$$

En répétant le même raisonnement et en rappelant que $y_1 = e$, on obtient

$$\mathbb{P}(\{\mathrm{sgn}(y_k)\xi_k \geq |y_k|\}) \geq\ \mathbb{P}(\{\xi_1 \geq e\}) \prod_{q=1}^{k} \mathbb{P}(\{\mathrm{sgn}(y_q)\xi_q \geq |y_q|\,|\,\xi_{q-1} = y_{q-1}\}).$$

Or, comme on a

$$\mathbb{P}(\{\mathrm{sgn}(y_q)\xi_q \geq |y_q|\,|\,\xi_{q-1} = y_{q-1}\}) =$$
$$= 1 - \mathbb{P}(\{\mathrm{sgn}(y_{q-1})\xi_q > \mathrm{sgn}(y_{q-1})y_q\,|\,\xi_{q-1} = y_{q-1}\}),$$

en vertu de (65) on a

$$\mathbb{P}(\{\mathrm{sgn}(y_k)\xi_k \geq |y_k|\}) \geq \mathbb{P}(\{\xi_1 \geq e\}) \prod_{q=1}^{k-1} (1 - \frac{2\sqrt{e+2}}{\sqrt{2\pi} e^q q^{(1+\varepsilon)/2}} e^{-\frac{e^{2q} q^{1+\varepsilon}}{2(e+2)}}). \tag{67}$$

En posant

$$\varepsilon_q = \frac{2\sqrt{e+2}}{\sqrt{2\pi} e^q q^{(1+\varepsilon)/2}} e^{-\frac{e^{2q} q^{1+\varepsilon}}{2(e+2)}},$$

on constate que

$$0 < \varepsilon_{q+1} < \varepsilon_q \qquad \forall q \in \mathbb{N}\backslash\{0\}.$$

Donc, en posant

$$\alpha_1 = -\frac{\log(1-\varepsilon_1)}{\varepsilon_1},$$

on a

$$1 - \varepsilon_q \geq e^{-\alpha_1 \varepsilon_q}, \qquad \forall q \in \mathbb{N}\backslash\{0\}.$$

D'autre part, il n'est pas difficile de voir que

$$\sum_{q=1}^{\infty} \varepsilon_q = \sum_{q=1}^{\infty} \frac{2\sqrt{e+2}}{\sqrt{2\pi} e^q q^{(1+\varepsilon)/2}} e^{-\frac{e^{2q} q^{1+\varepsilon}}{2(e+2)}} < \infty.$$

Par conséquent, on déduit de (67) que

$$\mathbb{P}(\{\mathrm{sgn}(y_k)\xi_k \geq |y_k|\}) \geq \mathbb{P}(\{\xi_0 \geq e\}) \prod_{q=1}^{k-1} \exp\big(-\alpha_1 \frac{2\sqrt{e+2}}{\sqrt{2\pi} e^q q^{(1+\varepsilon)/2}} e^{-\frac{e^{2q} q^{1+\varepsilon}}{2(e+2)}}) \geq$$

$$\geq \mathbb{P}(\{\xi_0 \geq e\}) \exp\big(-\alpha_1 \sum_{q=1}^{\infty} \frac{2\sqrt{e+2}}{\sqrt{2\pi} e^q q^{(1+\varepsilon)/2}} e^{-\frac{e^{2q} q^{1+\varepsilon}}{2(e+2)}}\big) > 0,$$

ce qui implique (66) et donc la divergence de $\{\xi(t)\}$ pour $t \to t_\infty$ avec une probabilité strictement positive.

Dans le cas où $\mathbb{P}(\{\xi_0 \leq -e\}) > 0$, en raisonnant de la même manière mais avec $\widetilde{y}_k = -y_k$ au lieu de y_k, on obtient la divergence de $\{\xi(t)\}$ pour $t \to t_\infty$ avec une probabilité strictement positive, ce qui achève la démonstration de la proposition.

□

References

[1] BALDI P., *Equazioni Differenziali Stocastiche e Applicazioni* (Quaderni UMI 28), Pitagora Ed., Bologna 2000.

[2] DA PRATO G. AND ZABCZYK J., *Ergodicity for Infinite-Dimensional Systems*, Cambridge Univ. Press, Cambridge 1996.

[3] GROW D. AND SANYAL S., *Existence and uniqueness for stochastic dynamic equations*, Int. J. Stat. Prob. **2** 2 (2013), 77–88.

[4] HAS'MINSKII R. Z., *Stochastic Stability of Differential Equations* (translated from Russian), Sijthoff & Noordhoff, 1980.

[5] KOMATSU T., *Markov processes associated with certain integro-differential operators*, Osaka J. Math. **10** (1973), 271–303.

[6] LUNGAN C. AND LUPULESCU V., *Random dynamical systems on time scales*, Elect. J. Diff. Eq. **2012** 86 (2012), 1–14.

[7] LUPULESCU V. AND LUNGAN C., *Random integral equations on time scales*, Opuscula Math. **33** (2013), 323–335.

[8] MAO X., MATASOV A. AND PIUNOVSKIY A. B., *Stochastic differential delay equations with Markovian switching*, Bernoulli **6** 1 (2000), 73–90.

[9] MAO X., YUAN CH. AND ZOU J., *Stochastic differential delay equations of population dynamics*, J. Math. Anal. Appl. **304** (2005), 296–320.

[10] OKSENDAL B., *Stochastic Differential Equations, an Introduction with Applications* (Sixth Ed.), Springer, 2003.

[11] SANYAL S., *Stochastic Dynamic Equations*, PhD Thesis, Missouri Univ. Sci. Techn., 2008.

AMS Subject Classification: 34K50, 60H10.

Korichi Farhouh,
Ecole Normale Supérieure de Kouba
Kouba, Alger, Algérie
e-mail: `korifarhouh@yahoo.fr`

Lavoro arrivato in redazione il 9-8-15.