Rend. Sem. Mat. Univ. Politec. Torino
Vol. 72, 3–4 (2014), 173 – 194

M. Benssaad, F. Ellaggoune*

SOLUTION STATIONNAIRE DU SYSTÈME D'ÉQUATIONS DE LA RADIATION ET DU MOUVEMENT D'UN GAZ VISQUEUX ET CALORIFÈRE

Résumé. Nous considérons le système d'équations décrivant le mouvement d'un gaz visqueux et calorifère avec l'effet thermique de la radiation dans un domaine borné de $\mathbb{R}^3$. En supposant que les coefficients d'absorption et la force extérieur sont petits et que les radiations qui entrent sont suffisamment homogènes, nous démontrons l'existence d'une solution stationnaire de ce système.

1. Introduction

Comme il est bien connu, dans l'atmosphère la radiation provient principalement du soleil et de la surface terrestre et une partie de cette radiation est absorbée par certaines composantes de l'air ou diffusée par déviation ou réflexion dans l'atmosphère ; en outre l'absorption du rayonnement par l'air provoque l'augmentation de la température et l'air réchauffé, à son tour, émet le rayonnement, ce qui entraîne la diminution de la température. Les équations qui décrivent ces phénomènes peuvent être trouvées par exemple dans [11]. Or, si nous voulons décrire d'une manière plus réelle les effets de la radiation dans l'atmosphère, nous avons besoin de coupler les équations de la radiation avec celles du mouvement de l'air.

En ce qui concerne l'étude mathématique d'un système d'équations décrivant le mouvement de l'air et l'effet de la radiation, nous rappelons d'abord le travail d'Amosov [1], qui démontre l'existence et l'unicité de la solution globale du système d'équations en une dimension. D'autre part Ducomet et ses co-auteurs ([4, 5, 6, 7, 8]) ont étudié la solution faible de l'équation d'évolution dans un domaine de dimension 1 ou 3.

Dans le présent travail, nous allons nous occuper de la solution stationnaire des équations. Nous rappelons que les équations décrivant le mouvement stationnaire d'un gaz visqueux et calorifère ont été étudiées par plusieurs auteurs (voir [3, 9, 16], etc...), qui ont démontré l'existence d'une solution stationnaire pour ces équations, en utilisant différentes approximations de la pression et différentes données de la température sur la frontière. D'autre part, les équations décrivant l'intensité de la radiation et de la température de l'air sans mouvement ont été étudiée dans [13], en démontrant l'existence d'une solution stationnaire du système d'équations dans un domaine borné ($\Omega \subset \mathbb{R}^3$).

Le but du présent travail est de démontrer l'existence d'une solution stationnaire dans un domaine borné sous des hypothèses convenables. En particulier, nous supposons que les coefficients d'absorption et de diffusion du rayonnement sont petits et indépendants de la variable spatiale x. Du point de vue technique, il s'agit d'un système d'équations pour les inconnues $(u, T, \rho, \{I_\lambda\}_{\lambda>0})$ qui représentent respectivement la vitesse, la température, la densité de l'air et l'intensité de la radiation de longueur d'onde λ. Dans nos raisonnements nous allons utiliser des idées des articles [3, 9, 13, 16].

2. Position du problème

Nous désignons par ρ la densité, par T la température, par $u = (u_1, u_2, u_3)$ la vitesse de l'air et par I_λ l'intensité de la radiation de longueur d'onde λ. Nous admettons que la pression p est donnée par

$$p = R\rho T,$$

où R est la constante universelle des gaz (divisée par la masse molaire moyenne de l'air). Si le mouvement de l'air est stationnaire, on aura le système d'équations (voir [10, 11])

$$\nabla\cdot(\rho u) = 0, \tag{1}$$

$$\rho(u\cdot\nabla)u + R\nabla(\rho T) = \eta\Delta u + (\frac{1}{3}\eta+\zeta)\nabla(\nabla\cdot u) + \rho f, \tag{2}$$

$$c_v\rho u\cdot\nabla T + R\rho T\nabla\cdot u = \tag{3}$$

$$= \kappa\Delta T + \eta\sum_{j,k=1}^{3}(\frac{\partial u_j}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_j})\frac{\partial u_j}{\partial x_k} + (\zeta - \frac{2}{3}\eta)(\nabla\cdot u)^2 - \nabla\cdot E(I_\lambda),$$

$$-\frac{1}{a_\lambda + r_\lambda}(q\cdot\nabla)I_\lambda(x,q) = I_\lambda(x,q) - J_\lambda(x,q,I_\lambda,T) \qquad (q\in S^2), \tag{4}$$

où $J_\lambda(x,q,I_\lambda,T)$ et $E(I_\lambda) = (E_1, E_2, E_3)$ sont donnés par

$$J_\lambda(x,q,I_\lambda,T) = \frac{1}{4\pi}\frac{r_\lambda}{a_\lambda + r_\lambda}\int_{S^2} I_\lambda(x,q')P_\lambda(q',q)dq' + \tag{5}$$

$$+\frac{a_\lambda}{a_\lambda + r_\lambda}B[\lambda, T(x)],$$

$$E_j(x) = \int_0^\infty\int_{S^2} I_\lambda(x,q)q_j dq d\lambda, \qquad j = 1,2,3, \tag{6}$$

tandis que η et ζ sont les coefficients de viscosité, κ la conductibilité thermique et c_v la chaleur spécifique à volume constant ; en outre a_λ est le coefficient d'absorption de la radiation, r_λ le coefficient de diffusion de la radiation, $P_\lambda(q',q)$ la diffusion de la radiation de la direction q' dans la direction q et $a_\lambda B[\lambda, T]$ désigne l'émission de la radiation, où la fonction $B[\lambda, T]$, dite *fonction de Planck*, est donnée par

$$B[\lambda, T] = \frac{2\pi c^2 h}{\lambda^5}(e^{\frac{ch}{k\lambda T}} - 1)^{-1} \tag{7}$$

(ici c est la vitesse de la lumière, h la constante de Planck et k la constante de Boltzmann). Dans (2)-(3) nous avons supposé que η, ζ, κ sont constants.

Dans le présent travail nous considérons le système d'équations (1)-(4) dans un domaine borné $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ avec la condition de la masse totale prédéterminée

$$\int_\Omega \rho(x)dx = K_\rho > 0 \qquad (K_\rho : \text{constante}) \tag{8}$$

et avec les conditions aux limites

$$u\big|_{\partial\Omega} = 0, \tag{9}$$

$$\nabla T \cdot n\big|_{\partial\Omega} = 0, \tag{10}$$

où n est le vecteur normal extérieur à $\partial\Omega$.

Nous précisons nos hypothèses sur les coefficients : nous supposons que

$$a_\lambda > 0, \quad r_\lambda \geq 0, \quad a_\lambda, r_\lambda : \text{ constants}, \tag{11}$$

$$P_\lambda(q',q) \geq 0 \quad \forall q', q \in S^2, \qquad \frac{1}{4\pi}\int_{S^2} P_\lambda(q',q)dq = 1 \quad \forall q' \in S^2. \tag{12}$$

Pour préciser les conditions aux limites (conditions d'entrée) pour $\{I_\lambda\}_{\lambda>0}$, il est commode de transformer l'équation (4) en une équation intégrale. En effet, en posant

$$b_\lambda = a_\lambda + r_\lambda, \tag{13}$$

on peut réécrire l'équation (4) dans la forme

$$\frac{d}{d\alpha} I_\lambda(x+\alpha q, q) = -b_\lambda I_\lambda(x+\alpha q, q) + b_\lambda J_\lambda(x+\alpha q, q, I_\lambda, T). \tag{14}$$

Pour $(x,q) \in \Omega \times S^2$ on pose

$$\alpha^0_{(x,q)} = \inf\{\, \alpha \in \mathbb{R} \,|\, x+\alpha' q \in \Omega \ \forall \alpha' \in]\alpha, 0[\,\}. \tag{15}$$

L'équation (14) avec la condition

$$I_\lambda(x+\alpha^0_{(x,q)}q, q) = I^0_\lambda(x+\alpha^0_{(x,q)}q, q) \tag{16}$$

peut être résolue formellement par la fonction

$$I_\lambda(x,q) = I^0_\lambda(x+\alpha^0_{(x,q)}q, q)\exp(\alpha^0_{(x,q)}b_\lambda) + \tag{17}$$

$$+\frac{r_\lambda}{4\pi}\int_{\alpha^0_{(x,q)}}^0 \int_{S^2} P_\lambda(q',q) I_\lambda(x+\alpha' q, q')\exp(\alpha' b_\lambda)dq'd\alpha' +$$

$$+a_\lambda \int_{\alpha^0_{(x,q)}}^0 B[\lambda, T(x+\alpha' q)] \exp(\alpha' b_\lambda) d\alpha'.$$

Pour $x^0 \in \partial\Omega$ on pose

$$S^2_-(x^0) = \{q \in S^2 \,|\, \exists\, \varepsilon > 0\,,\, x^0 + \alpha q \in \Omega,\ \forall \alpha \in]0, \varepsilon[\,\} \tag{18}$$

et on définit l'ensemble

$$\Xi = \bigcup_{x^0 \in \partial\Omega} \big(\{x^0\} \times S^2_-(x^0)\big). \tag{19}$$

On admet que $I^0_\lambda(x^0, q)$ est donnée pour tout $(x^0, q) \in \Xi$. On suppose que

$$\sup_{(x^0,q)\in\Xi} I^0_\lambda(x^0, q) < \infty. \tag{20}$$

Nous nous proposons de démontrer l'existence d'une solution $(\rho, u, T, \{I_\lambda\}_{\lambda>0})$ pour le système d'équations (1)-(4) avec les conditions (8)-(10).

3. Préliminaires

On considère d'abord la famille d'équations (17), en supposant que la fonction $T(x)$ est donnée. Or, comme on le constate immédiatement, si $T(x)$ est donnée, on peut envisager la famille d'équations (17) séparément pour chaque λ. Donc ici nous raisonnons en fixant un $\lambda > 0$.

LEMME 1. *Soient a_λ, r_λ des constantes et $P_\lambda(q', q)$ une fonction mesurable définie sur $S^2 \times S^2$ satisfaisant aux conditions* (11) *et* (12). *Soit en outre $I^0_\lambda(x^0, q)$ une fonction mesurable, non-négative, définie sur Ξ et satisfaisant à la condition* (20). *Si une fonction $T(x) \in L^\infty(\Omega)$, $T(x) > 0$, est donnée et si on a*

$$r_\lambda \mathrm{diam}(\Omega) \|P\|_{L^\infty(S^2\times S^2)} < 1, \tag{21}$$

alors l'équation (17) *admet une solution I_λ et une seule dans la classe $L^\infty(\Omega \times S^2)$.*

Pour la démonstration, voir [13], Proposition 3.1.

Le lemme 1 nous permet de considérer E définie dans (6) comme fonction déterminée par la fonction $T(x)$. Plus précisément on définit $E(T)$ par

$$E_j(T)(x) = \int_0^\infty \int_{S^2} I_\lambda(x, q) q_j dq d\lambda, \qquad j = 1, 2, 3, \tag{22}$$

où $I_\lambda(x, q)$ est la solution de (17) avec une fonction donnée $T(\cdot)$.

Maintenant on va définir deux constantes strictement positives $\overline{\rho}$, $\overline{T}$. On pose d'abord

$$\overline{\rho} = \frac{K_\rho}{|\Omega|}, \tag{23}$$

où $|\Omega|$ est la mesure de l'ensemble Ω (K_ρ est la constante introduite dans (8)).

D'autre part, pour définir la constante $\overline{T} > 0$, on rappelle la propriété suivante de $E(T)$.

LEMME 2. *Sous les mêmes conditions du lemme 1 il existe une constante strictement positive $\overline{T}$ et une seule telle que l'égalité*

$$\int_\Omega \nabla \cdot E(\overline{T})dx = 0 \tag{24}$$

soit vérifiée.

Pour la démonstration, voir [13], Lemme 4.3.

D'après le lemme 2 nous définissons la constante $\overline{T}$ par la relation (24). Etant définies les constantes $\overline{\rho}$ et $\overline{T}$, nous posons

$$\sigma = \rho - \overline{\rho}, \qquad \vartheta = T - \overline{T}. \tag{25}$$

Nous rappelons encore une autre propriété de $E(T)$.

LEMME 3. *On a*

$$\nabla \cdot E(\vartheta + \overline{T}) - \nabla \cdot E(\overline{T}) = 4\pi \int_0^\infty a_\lambda [B(\lambda, \vartheta + \overline{T}) - B(\lambda, \overline{T})] d\lambda. \tag{26}$$

Démonstration. L'égalité (26) résulte de la définition de $E(\cdot)$ (voir aussi (4), (6)) par des calculs élémentaires. □

On pose

$$\overline{\beta}_0' = \frac{d}{d\vartheta}\left[4\pi \int_0^\infty a_\lambda [B(\lambda, \vartheta + \overline{T}) - B(\lambda, \overline{T})] d\lambda\right]\Big|_{\vartheta=0}, \tag{27}$$

$$\beta_1(\vartheta) = 4\pi \int_0^\infty a_\lambda [B(\lambda, \vartheta + \overline{T}) - B(\lambda, \overline{T})] d\lambda - \overline{\beta}_0' \vartheta. \tag{28}$$

De l'expression (7) de la fonction $B(\lambda, T)$, on voit que $\beta_1(\vartheta)$ est au moins deux fois continûment dérivable et, comme

$$\frac{\partial}{\partial T} B(\lambda, T) = \frac{2\pi c^3 h^2}{\lambda^6 k T^2} e^{\frac{ch}{k\lambda T}} (e^{\frac{ch}{k\lambda T}} - 1)^{-2} > 0,$$

on a

$$\overline{\beta}_0' > 0. \tag{29}$$

Pour avoir l'idée sur le comportement de $\overline{\beta}_0'$ et $\beta_1(\vartheta)$ il est utile de rappeler que, si a_λ est constante, alors on a

$$\int_0^\infty a_\lambda B(\lambda, T) d\lambda = a_\lambda \sigma_0 T^4$$

avec une constante $\sigma_0 > 0$, ce qui correspond à la loi de Stefan-Boltzmann.

Cela étant, on peut transformer le système d'équations (1)-(3) pour les inconnues (ρ, T, u) en un système d'équations pour les inconnues (σ, ϑ, u)

$$\nabla \cdot (\sigma u) = -\overline{\rho} \nabla \cdot u, \tag{30}$$

$$-\eta \Delta u - (\frac{1}{3}\eta + \zeta)\nabla(\nabla \cdot u) + R\overline{\rho}\nabla\vartheta + R\overline{T}\nabla\sigma = F(\sigma, \vartheta, u), \tag{31}$$

$$-\kappa\Delta\vartheta + \overline{\beta}_0'\vartheta = G(u, \vartheta, \sigma) - R\overline{\rho}\overline{T}\nabla \cdot u, \tag{32}$$

où

$$F(\sigma, \vartheta, u) = (\sigma + \overline{\rho})f - (\sigma + \overline{\rho})(u \cdot \nabla)u - R\sigma\nabla\vartheta - R\vartheta\nabla\sigma, \tag{33}$$

$$\begin{aligned} G(\sigma, \vartheta, u) = &-(\sigma + \overline{\rho})c_v u \cdot \nabla\vartheta - R(\overline{\rho}\vartheta + \sigma\overline{T} + \sigma\vartheta)\nabla \cdot u + \\ &+\eta \sum_{j,k=1}^{3} (\frac{\partial u_j}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_j})\frac{\partial u_j}{\partial x_k} + (\zeta - \frac{2}{3}\eta)(\nabla \cdot u)^2 - \nabla \cdot E(\overline{T}) - \beta_1(\vartheta). \end{aligned} \tag{34}$$

Avec la formulation des équations (30)-(32) le problème (1)-(4), (8)-(10), (16) se réduit à celui des équations (30)-(32) avec les conditions (9),

$$\int_\Omega \sigma(x)dx = 0, \tag{35}$$

$$\nabla\vartheta \cdot n\big|_{\partial\Omega} = 0. \tag{36}$$

Dans cette nouvelle formulation, l'équation (4) n'est pas inscrite explicitement ; en effet, comme elle fait partie de la définition de $E(T)$ dans (22), la définition de $E(T)$ implique qu'elle est vérifiée.

4. Equations linéarisées

Pour démontrer l'existence d'une solution du problème (30)-(32), (35), (36), (9), en suivant la méthode généralement utilisée pour les équations stationnaires d'un gaz visqueux (voir [3, 9, 16], etc...), on considère d'abord le système linéarisé des équations (30)-(32), et ensuite, avec la résolution du système linéarisé on définira un opérateur non-linéaire qui, à $(\sigma', \vartheta', u')$, associe la solution (σ, ϑ, u) du système linéarisé et on cherchera un point fixe de cet opérateur.

Pour formuler le système d'équations linéarisées, on prolonge formellement la fonction $\beta_1(\vartheta)$ pour $\vartheta \leq -\overline{T}$ par

$$\beta_1(\vartheta) = -4\pi \int_0^\infty a_\lambda B(\lambda, \overline{T})d\lambda - \overline{\beta}_0'\vartheta \qquad \text{pour } \vartheta \leq -\overline{T}. \tag{37}$$

Il est clair que le prolongement (37), qui correspond au prolongement de $B(\lambda,T)$ par $B(\lambda,T)=0$ pour $T\leq 0$, ne modifie pas la régularité nécessaire de $\beta_1(\vartheta)$ (voir (7)) ni le résultat en tant que la solution vérifira la relation $T>0$ et donc $\vartheta>-\overline{T}$.

Nous considérons le système d'équations linéarisées

$$\frac{\sigma-\sigma'}{h}+\nabla\cdot(\sigma u)=-\overline{\rho}\nabla\cdot u, \tag{38}$$

$$-\eta\Delta u-(\frac{\eta}{3}+\zeta)\nabla(\nabla\cdot u)+R\overline{\rho}\nabla\vartheta=F(\sigma',\vartheta',u')-R\overline{T}\nabla\sigma', \tag{39}$$

$$-\kappa\Delta\vartheta+\overline{\beta}_0'\vartheta=G(\sigma',\vartheta',u')-R\overline{\rho}\overline{T}\nabla\cdot u, \tag{40}$$

où σ', ϑ', u' sont des fonctions données, tandis que h est une constante strictement positive ; dans (40) la fonction $G(\cdot,\cdot,\cdot)$ est à entendre avec le prolongement (37). Le système d'équations (38)-(40) devra être considéré avec les condition (9), (35) et (36) ; dans (38) on prendra $h>0$ suffisamment petit.

Pour étudier ce système d'équations, nous introduisons les espaces

$$H^3_a(\Omega)=\{u\in H^3(\Omega)\,|\,u=0 \text{ sur } \partial\Omega\},$$

$$H^2_b(\Omega)=\{\vartheta\in H^2(\Omega)\,|\,\nabla\vartheta\cdot n=0 \text{ sur } \partial\Omega\},$$

$$H^2_c(\Omega)=\{\sigma\in H^2(\Omega)\,|\int_\Omega\sigma(x)dx=0\}.$$

Dans cette section nous allons montrer des résultats que nous pouvons obtenir comme variantes de résultas classiques, tandis que dans la section suivante nous allons présenter les estimations spécifiques qui nous conduiront à l'existence d'un point fixe de l'opérateur qui, à (σ',ϑ',u'), associe (σ,ϑ,u). Pour simplifier la notation, dans la suite on notera $\|\cdot\|_{L^2}$ et $\|\cdot\|_{H^m}$ $(m=1,2,3)$ au lieu de $\|\cdot\|_{L^2(\Omega)}$ et $\|\cdot\|_{H^m(\Omega)}$.

Considérons d'abord les équations (39), (40). Alors on a le lemme suivant.

LEMME 4. *Soit* $(u',\vartheta',\sigma')\in H^3_a(\Omega)\times H^2_b(\Omega)\times H^2_c(\Omega)$. *On pose*

$$F'=F(\sigma',\vartheta',u'),\qquad G'=G(\sigma',\vartheta',u'). \tag{41}$$

Alors les affirmations suivantes sont valables :

i) les équations (39), (40) *avec les conditions* (9), (36) *admettent une solution* (u,ϑ) *et une seule dans* $H^1_0(\Omega)\times H^1(\Omega)$ *et il existe une constante* $c>0$ *telle que la solution* (u,ϑ) *vérifie l'inégalité*

$$\|u\|_{H^1}+\|\vartheta\|_{H^1}\leq c(\|F'\|_{H^{-1}}+\|G'\|_{(H^1)'}+\|\sigma'\|_{L^2}); \tag{42}$$

ii) il existe une constante $c>0$ *telle que la solution* ϑ *vérifie l'inégalité*

$$\|\vartheta\|_{H^2}\leq c(\|G'\|_{L^2}+\|\nabla\cdot u\|_{L^2}); \tag{43}$$

iii) la solution (u,ϑ) *appartient à* $H_a^3(\Omega)\times H_b^2(\Omega)$ *et il existe une constante* $c>0$ *telle que la solution* (u,ϑ) *vérifie l'inégalité*

$$\|u\|_{H^3}+\|\vartheta\|_{H^2}\leq c(\|F'\|_{H^1}+\|G'\|_{L^2}+\|\nabla\sigma'\|_{H^1}). \tag{44}$$

Démonstration. Si $\vartheta'\in H_b^2(\Omega)$, il existe une constante C (dépendante de ϑ') telle que

$$|\vartheta'(x)|\leq C \qquad \forall x\in\Omega,$$

ce qui, d'après la définition (28), (37) de $\beta_1(\cdot)$, implique que

$$\beta_1(\vartheta')\in L^\infty(\Omega)\subset (H^1)'.$$

Cela étant, en examinant les autres termes de $G(\sigma',\vartheta',u')$ et l'expression de $F(\cdot,\cdot,\cdot)$ (voir (33), (34)), il n'est pas difficile de constater que la relation $(u',\vartheta',\sigma')\in H_a^3(\Omega)\times H_b^2(\Omega)\times H_c^2(\Omega)$ implique que $F(\sigma',\vartheta',u')\in H^{-1}$, $G(\sigma',\vartheta',u')\in (H^1)'$.

Or, en multipliant (39) par u et (40) par $\frac{1}{\overline{\overline{T}}}\vartheta$, de leur intégrale on obtient

$$\eta\int_\Omega|\nabla u|^2dx+(\frac{\eta}{3}+\zeta)\int_\Omega|\nabla\cdot u|^2dx+\frac{\kappa}{\overline{\overline{T}}}\int_\Omega|\nabla\vartheta|^2dx+\frac{\overline{\beta}_0'}{\overline{\overline{T}}}\int_\Omega|\vartheta|^2dx=$$
$$=\int_\Omega F'\cdot udx+\frac{1}{\overline{\overline{T}}}\int_\Omega G'\vartheta dx+R\overline{T}\int_\Omega\sigma'\nabla\cdot udx.$$

Compte tenu de la condition (29), on en déduit la coersivité de la forme bilinéaire associée, ce qui nous permet de démontrer l'affirmation *i*) par la méthode usuelle pour les équations du type elliptique.

L'affirmation *ii*) résulte de la théorie classique des équations du type elliptique.

Quant à l'affirmation *iii*), comme on a déjà les inégalités (42)-(43), on peut démontrer (44), en appliquant à l'équation (39) la méthode usuelle pour la régularité de la solution faible (solution généralisée) d'une équation du type elliptique avec la condition de Dirichlet homogène avec la décomposition du domaine Ω en une partie intérieure et une famille finie de sous-domaines couvrant le voisinage de la frontière $\partial\Omega$ (voir par exemple la démonstration des Théorèmes 3 et 4 de la § 2 du Chap. IV de [14] ; la forme spécifique de cette application à l'équation (39) est analogue aux lemmes 5.1 - 5.8 de la section suivante). □

Pour l'équation (38) on a le lemme suivant.

LEMME 5. *Soient* $\sigma'\in H_c^2(\Omega)$ *et* $u\in H_a^3(\Omega)$. *On suppose que* $\|u\|_{H^3}\leq 1$. *Alors il existe* $\overline{h}_0>0$ *tel que pour tout* $h\in]0,\overline{h}_0]$ *l'équation* (38) *admet une unique solution* σ *dans* $H_c^2(\Omega)$ *et il existe une constante* $c>0$ *telle que la solution* σ *vérifie l'inégalité*

$$\|\sigma\|_{H^2}\leq c(\|\sigma'\|_{H^2}+\|u\|_{H^3}). \tag{45}$$

Pour la démonstration du lemme 5, voir [9], Lemme 2.3.

Les fonctions $F(\cdot,\cdot,\cdot)$ et $G(\cdot,\cdot,\cdot)$ jouissent de la propriété suivante (nous utilisons la notation introduite dans (41)).

LEMME 6. *Soit* $(u', \vartheta', \sigma') \in H^3_a(\Omega) \times H^2_b(\Omega) \times H^2_c(\Omega)$. *Alors on a*

$$F' \in H^1(\Omega), \qquad G' \in L^2(\Omega)$$

et il existe une constante c telle que

$$\|F'\|_{H^1} \leq c\big((1 + \|\sigma'\|_{H^2})\|f\|_{H^1} + \|\vartheta'\|_{H^2}\|\sigma'\|_{H^2} + \\ +(1 + \|\sigma'\|_{H^2})\|u'\|_{H^1}\|u'\|_{H^3}\big). \tag{46}$$

En outre, si on suppose que $\|\vartheta'\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \frac{\overline{T}}{2}$, *alors on peut déterminer une constante c telle que*

$$\|G'\|_{L^2} \leq c\big((1 + \|\sigma'\|_{H^2})\|u\|_{H^2}\|\vartheta'\|_{H^1} + \|\sigma'\|_{H^2} + \\ +(\|\vartheta'\|_{H^2} + \|\sigma'\|_{H^2}\|\vartheta'\|_{H^2})\|u'\|_{H^1} + \|u'\|_{H^3}\|u'\|_{H^1} + \\ +\|\nabla \cdot E(\overline{T})\|_{L^2} + \|\vartheta'\|^2_{L^2}\big). \tag{47}$$

Démonstration. Il n'est pas difficile de déduire de l'expression de $F(\cdot,\cdot,\cdot)$ et de celle de $G(\cdot,\cdot,\cdot)$ données dans (33) et (34) (voir aussi la définition (28) de $\beta_1(\vartheta)$) la première partie de l'énoncé du lemme.

En outre, de l'expression de la fonction $B(\lambda, T)$ donnée dans (7) et de la définition de $\beta_1(\vartheta)$ il résulte que, si $\|\vartheta'\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \frac{\overline{T}}{2}$, on peut déterminer une constante $c_1 > 0$ qui vérifie l'inégalité

$$|\beta_1(\vartheta')| \leq c_1|\vartheta'|^2 \quad \text{pour } |\vartheta'| \leq \frac{\overline{T}}{2}.$$

Cela étant, en rappelant encore l'expression de $G(\cdot,\cdot,\cdot)$ donnée dans (34), on obtient l'inégalité (47). □

Grâce aux lemmes 4.1-4.3, si on pose

$$D_\Phi = \{\, (u, \vartheta, \sigma) \in H^3_a(\Omega) \times H^2_b(\Omega) \times H^2_c(\Omega) \,|\, \|u\|_{H^3} \leq 1 \,\},$$

on peut définir l'opérateur

$$\Phi : D_\Phi \to H^3_a(\Omega) \times H^2_b(\Omega) \times H^2_c(\Omega),$$

défini par la relation

$$\Phi(u', \vartheta', \sigma') = (u, \vartheta, \sigma), \tag{48}$$

où (u, ϑ, σ) est la solution du système d'équations (38)-(40).

5. Estimations de la solution des équations linéarisées

Dans cette section nous allons établir des estimations spécifiques des solutions u, ϑ, σ des équations (38)-(40), estimations qui nous permettront de démontrer l'existence d'un point fixe de l'opérateur Φ. Ces estimations se démontrent d'une manière analogue aux lemmes établis dans [9] et [16], même s'il y a des différences non négligeables dues à la présence du terme $\overline{\beta}_0'\vartheta$ dans (40) et, avec [9], aux différentes conditions aux limites et, avec [16], à la présence de l'équation pour la température (dans [16] est étudié le système d'équations d'un gaz barotropique). Compte tenu de ces circonstances, nous suivons essentiellement la présentation des lemmes de [9] et de [16] et, là où il est possible, nous nous limitons à les citer.

LEMME 7. *Soit* $(u',\vartheta',\sigma') \in H_a^3(\Omega)\times H_b^2(\Omega)\times H_c^2(\Omega)$. *Soit* (σ,u,ϑ) *la solution du système d'équations* (38)-(40). *Alors il existe une constante c telle que, quel que soit* $\delta > 0$, *on ait*

$$\alpha(\|\nabla u\|_{L^2}^2+\|\vartheta\|_{H^1}^2)+\frac{\alpha}{h}(\|\sigma\|_{L^2}^2-\|\sigma'\|_{L^2}^2+\frac{1}{2}\|\sigma-\sigma'\|_{L^2}^2)\leq \tag{49}$$

$$\leq c(\|F'\|_{H^{-1}}^2+\|G'\|_{(H^1)'}^2)+c(\delta^8\|u\|_{H^3}^2+\frac{1}{\delta^8}\|\sigma\|_{L^2}^4).$$

où α *est une constante strictement positive déterminée par* η, ζ, κ, $\overline{\rho}$, $\overline{T}$, $\overline{\beta}_0'$.

Démonstration. Si on multiplie l'équation (38) par $\frac{R\overline{T}}{\overline{\rho}}\sigma$, l'équation (39) par u et l'équation (40) par $\frac{1}{\overline{T}}\vartheta$, et si on les intègre sur Ω, on obtient

$$\eta\|\nabla u\|_{L^2}^2+(\frac{\eta}{3}+\zeta)\|\nabla\cdot u\|_{L^2}^2+\frac{\kappa}{\overline{T}}\|\nabla\vartheta\|_{L^2}^2+\frac{\overline{\beta}_0'}{\overline{T}}\|\vartheta\|_{L^2}^2+\frac{R\overline{T}}{h\overline{\rho}}\int_\Omega(\sigma-\sigma')\sigma dx= \tag{50}$$

$$=\int_\Omega F'\cdot u dx+\frac{1}{\overline{T}}\int_\Omega G'\vartheta dx-R\overline{T}\int_\Omega(u\cdot\nabla\sigma'+\sigma\nabla\cdot u)dx-\frac{R\overline{T}}{\overline{\rho}}\int_\Omega(\nabla\cdot(\sigma u))\sigma dx.$$

En tenant compte des relations

$$(\sigma-\sigma')\sigma=\frac{1}{2}(\sigma^2-\sigma'^2)+\frac{1}{2}(\sigma'-\sigma)^2,$$

$$-\frac{R\overline{T}}{\overline{\rho}}\int_\Omega\nabla\cdot(\sigma u)\sigma dx\leq c\|u\|_{H^3}\|\sigma\|_{L^2}^2,$$

$$-R\overline{T}\int_\Omega(\sigma\nabla\cdot u+u\cdot\nabla\sigma')dx\leq c\|\nabla u\|_{L^2}\|\sigma-\sigma'\|_{L^2}$$

(et en rappelant que h est supposé suffisamment petit), on déduit de (50) l'inégalité (49). □

Pour obtenir les estimations des dérivées d'ordre supérieur de u, ϑ, σ, on considère deux familles $\{\omega_k^{(0)}\}_{k=0}^N$, $\{\omega_k^{(1)}\}_{k=0}^N$ de sous-ensembles ouverts de Ω et une famille $\{\chi_k\}_{k=0}^N$ de fonctions de classe $C^4(\Omega)$; on choisit ces familles de sous-ensembles et de fonctions de telle sorte que

$$\bigcup_{k=0}^{N} \omega_k^{(0)} = \Omega, \qquad \overline{\omega_0^{(1)}} \subset \Omega,$$

$$(\overline{\omega_k^{(0)}} \cap \Omega) \subset \omega_k^{(1)}, \quad \chi_k(x) \geq 0 \quad \forall x \in \Omega, \quad \chi_k(x) = 1 \quad \forall x \in \omega_k^{(0)},$$

$$\mathrm{supp}\chi_k \subset \omega_k^{(1)} \cup \partial\Omega, \qquad \text{pour} \quad k = 0, 1, \cdots, N,$$

et que $\omega_k^{(1)}, k = 1, \cdots, N$, soient convenablement petits.

Pour simplifier la notation, nous utilisons α pour désigner une constante strictement positive déterminée par η, ζ, κ, $\overline{\rho}$, $\overline{T}$ et $\overline{\beta}_0'$ (comme le lemme 7) et convenons d'écrire D_x au lieu de ∂_{x_j} $(j = 1, 2, 3)$, D_x^2 au lieu de $\partial_{x_j}\partial_{x_k}$ $(j, k = 1, 2, 3)$ et D_x^3 au lieu de $\partial_{x_j}\partial_{x_k}\partial_{x_l}$ $(j, k, l = 1, 2, 3)$; par $|D_x \cdot|^2$, $|D_x^2 \cdot|^2$, $|D_x^3 \cdot|^2$ on entendra la somme obtenue quand j, k, l parcourent l'ensemble $\{1, 2, 3\}$ (par exemple $|D_x^2\vartheta|^2 = \sum_{j,k=1}^3 |\partial_{x_j}\partial_{x_k}\vartheta|^2$). Cette convention de notations α, D_x, D_x^2 et D_x^3 a été adoptée également dans [9] et [16].

Nous commençons par l'estimation sur la partie intérieure.

LEMME 8. *Soient u', ϑ', σ', u, ϑ et σ comme dans le lemme 7. Alors il existe une constante c telle que, quel que soit* $\delta \in]0, 1[$, *on ait*

(51)
$$\alpha \int_\Omega \chi_0^2 (|D_x^2 u|^2 + |D_x^2 \vartheta|^2 + |D_x \vartheta|^2) dx +$$
$$+ \frac{\alpha}{h} \int_\Omega \chi_0^2 (|D_x \sigma|^2 - |D_x \sigma'|^2 + \frac{1}{2}|D_x(\sigma - \sigma')|^2) dx \leq$$
$$\leq c(\|F'\|_{L^2}^2 + \|G'\|_{L^2}^2 + \|\vartheta\|_{H^1}^2) + \frac{c}{\delta^6}(\|u\|_{H^1}^2 + \|\sigma\|_{H^1}^4) +$$
$$+ \delta^2(\|\nabla(\overline{\rho}\vartheta + \overline{T}\sigma')\|_{L^2}^2 + \|u\|_{H^3}^2),$$

(52)
$$\alpha \int_\Omega \chi_0^2 |D_x^3 u|^2 dx + \frac{\alpha}{h} \int_\Omega \chi_0^2 (|D_x^2 \sigma|^2 - |D_x^2 \sigma'|^2 + \frac{1}{2}|D_x^2(\sigma - \sigma')|^2) dx \leq$$
$$\leq c(\|F'\|_{H^1}^2 + \|\vartheta\|_{H^2}^2) + \frac{c}{\delta}(\|u\|_{H^2}^2 + \|\sigma\|_{H^2}^4) + \delta(\|\nabla(\overline{\rho}\vartheta + \overline{T}\sigma')\|_{H^1}^2 + \|u\|_{H^3}^2).$$

Démonstration. On applique l'opérateur différentiel D_x aux équations (38)-(40) et on les multiplie par $\frac{R\overline{T}}{\overline{\rho}}\chi_0^2 D_x\sigma$, $\chi_0^2 D_x u$ et $\frac{1}{\overline{T}}\chi_0^2 D_x\vartheta$ respectivement. Si on les intègre sur Ω, en utilisant les relations

$$D_x(\sigma - \sigma')D_x\sigma = \frac{1}{2}(|D_x\sigma|^2 - |D_x\sigma'|^2) + \frac{1}{2}|D_x(\sigma' - \sigma)|^2,$$

$$-\frac{R\bar{T}}{\overline{\rho}}\int_\Omega D_x\nabla\cdot(\sigma u)\chi_0^2 D_x\sigma dx \le c\|u\|_{H^3}\|\sigma\|_{H^1}^2,$$

on en déduira l'inégalité

$$\int_\Omega \chi_0^2(|D_x^2 u|^2+|D_x^2\vartheta|^2+|D_x\vartheta|^2)dx+\frac{1}{h}\int_\Omega \chi_0^2(|D_x\sigma|^2-|D_x\sigma'|^2+\frac{1}{2}|D_x(\sigma-\sigma')|^2)dx \le$$

$$\le c\Big(\int_\Omega(|\nabla D_x u||D_x u|+|\nabla\cdot D_x u||D_x u|+|\nabla D_x\vartheta||D_x\vartheta|)|\nabla\chi_0^2|dx+$$

$$+\int_\Omega |F'||D_x(\chi_0^2 D_x u)|dx+\int_\Omega |G'||D_x(\chi_0^2 D_x\vartheta)|dx+\int_\Omega \chi_0^2|D_x\nabla\cdot u||\overline{\rho}D_x\vartheta|dx$$

$$+\int_\Omega |\nabla(\overline{\rho}\vartheta+\overline{T}\sigma')||D_x(\chi_0^2 D_x u)|dx\Big)+c\|u\|_{H^3}\|\sigma\|_{H^1}^2,$$

d'où par des calcules usuels, y compris l'application du théorème d'interpolation, on obtiendra l'inégalité (51).

Pour obtenir (52), on peut procéder d'une manière analogue ; plus précisément, on applique l'opérateur différentiel D_x^2 aux équations (38) et (39), et, en multipliant (38) par $\frac{R\overline{T}}{\overline{\rho}}\chi_0^2 D_x^2\sigma$ et (39) par $\chi_0^2 D_x^2 u$, on les intègre sur Ω, de sorte que, en procédant d'une manière analogue, on obtiendra l'inégalité (52). □

Comme on peut choisir $\{\omega_k^{(0)}\}_{k=1}^N$ et $\{\omega_k^{(1)}\}_{k=1}^N$ d'une manière convenable, pour obtenir les estimations nécessaires de u,ϑ,σ dans $\omega_k^{(0)}$ (et dans $\omega_k^{(1)}$) pour $k=1,\cdots,N$, il nous suffit d'examiner le cas d'un des sous-domaines $\omega_k^{(1)}$. Prenant donc un $k\in\{1,2,\cdots,N\}$ et écrivons simplement $\chi,\omega^{(0)},\omega^{(1)}$ au lieu de $\chi_k,\omega_k^{(0)},\omega_k^{(1)}$.

Nous introduisons un changement de variables comme dans [15, 16]. Choisissons un point $\bar{x}\in\overline{\omega^{(0)}}\cap\partial\Omega$ et considérons un système orthogonal de coordonnées (ψ,φ,x_3) tel que son origine coïncide avec $\bar{x}$ et le plan (ψ,φ) avec le plan tangent à $\partial\Omega$ au point $\bar{x}$ (on choisit la direction de l'axe x_3 par exemple dans la direction du vecteur normal extérieur). Alors on peut choisir d'une manière convenable une fonction $\mu\in C^4(\mathbb{R}^2;\mathbb{R}^3)$ de telle sorte que $\overline{\omega^{(1)}}\cap\partial\Omega$ soit contenu dans l'image de μ et que chaque point $x\in\overline{\omega^{(1)}}\cap\overline{\Omega}$ puisse être écrit d'une manière univoque dans la forme

$$x=\Lambda(\psi,\varphi,r)\equiv\mu(\psi,\varphi)+rn(\mu(\psi,\varphi))$$

$(n(\mu(\psi,\varphi))$ est le vecteur normal unitaire extérieur au point $\mu(\psi,\varphi)$ et $r\le 0)$.

On pose $y=(y_1,y_2,y_3)\equiv(\psi,\varphi,r)$, $W=\Lambda^{-1}(\overline{\omega^{(1)}})$. On introduit en outre

$$U(y)=u(\Lambda(y)),\quad \Theta(y)=\vartheta(\Lambda(y)),\quad \Sigma(y)=\sigma(\Lambda(y))$$

et transforme les équations (38)-(40) en

$$\frac{\Sigma-\Sigma'}{h}+\sum_{k,i=1}^3 a_{ki}\partial_{y_k}(\Sigma U_i)=-\overline{\rho}\sum_{k,i=1}^3 a_{ki}\partial_{y_k}U_i, \tag{53}$$

(54) $$-\eta \sum_{k,i,s=1}^{3} a_{ki}\partial_{y_k}(a_{si}\partial_{y_s}U_j) - (\frac{\eta}{3}+\zeta)\sum_{k,i,s=1}^{3} a_{kj}\partial_{y_k}(a_{si}\partial_{y_s}U_i) + R\overline{\rho}\sum_{k=1}^{3} a_{kj}\partial_{y_k}\Theta =$$

$$= F'_j - R\overline{T}\sum_{k=1}^{3} a_{kj}\partial_{y_k}\Sigma', \qquad j=1,2,3,$$

(55) $$-\kappa \sum_{k,i,s=1}^{3} a_{ki}\partial_{y_k}(a_{si}\partial_{y_s}\Theta) + \overline{\beta}'_0\Theta = G' - R\overline{\rho}\overline{T}\sum_{k,i=1}^{3} a_{ki}\partial_{y_k}U_i,$$

où
$$a_{kj} = \frac{\partial y_k}{\partial x_j} = \frac{\partial(\Lambda^{-1})_k}{\partial x_j}, \quad F'_j = F'_j(\Lambda(y)), \quad G' = G'(\Lambda(y)).$$

Pour la commodité de la présentation nous utiliserons les notations D_y, D_y^2, D_τ, D_n données par

$$D_y = (\partial_{y_i})_{i=1,2,3}, \quad D_y^2 = (\partial_{y_i}\partial_{y_j})_{i,j=1,2,3}, \quad D_\tau = (\partial_{y_1}, \partial_{y_2}), \quad D_n = \partial_{y_3},$$

et désignerons par J le déterminant jacobien de Λ.

LEMME 9. *Soient u', ϑ', σ', u, ϑ et σ comme dans le lemme 7. Alors il existe une constante c telle que, quel que soit* $\delta \in]0,1[$, *on ait*

(56) $$\alpha\int_W J\chi^2(|D_\tau D_y U|^2 + |D_\tau D_y\vartheta|^2 + |D_\tau\vartheta|^2)dy +$$
$$+\frac{\alpha}{h}\int_W J\chi^2(|D_\tau\Sigma|^2 - |D_\tau\Sigma'|^2 + \frac{1}{2}|D_\tau(\Sigma-\Sigma')|^2)dy \le$$
$$\le c(\|F'\|_{L^2}^2 + \|G'\|_{L^2}^2) + \frac{c}{\delta^6}(\|u\|_{H^1}^2 + \|\sigma\|_{H^1}^4) +$$
$$+c\delta^2(\|\nabla(\overline{\rho}\vartheta + \overline{T}\sigma')\|_{L^2}^2 + \|u\|_{H^3}^2),$$

(57) $$\alpha\int_W J\chi^2|D_\tau^2 D_y U|^2 dy +$$
$$+\frac{\alpha}{h}\int_W J\chi^2(|D_\tau^2\Sigma|^2 - |D_\tau^2\Sigma'|^2 + \frac{1}{2}|D_\tau^2(\Sigma-\Sigma')|^2)dy \le$$
$$\le c(\|F'\|_{H^1}^2 + \|\vartheta\|_{H^2}^2) + \frac{c}{\delta}(\|u\|_{H^2}^2 + \|\sigma\|_{H^2}^4) +$$
$$+c\delta(\|\nabla(\overline{\rho}\vartheta + \overline{T}\sigma')\|_{H^1}^2 + \|u\|_{H^3}^2).$$

Démonstration. Pour démontrer le lemme, on procède de manière analogue à la démonstration du lemme 2.8 de [9] et du lemme 2.4 de [16]. En effet, si on applique l'opérateur D_τ aux équations (53)-(55) et si, en les multipliant par $J\chi^2 D_\tau\Sigma$, $J\chi^2 D_\tau U$

et $J\chi^2 D_\tau\Theta$ respectivement, on les intègre sur W, par des calculs usuels, y compris l'application du théorème d'interpolation, on obtiendra (56).

En outre, si on applique D_τ^2 aux équations (53) et (54) et si, en les multipliant par $J\chi^2 D_\tau^2\Sigma$ et $J\chi^2 D_\tau^2 U$ respectivement, on les intègre sur W, on obtiendra (57). $\square$

Maintenant, nous allons estimer les dérivées par rapport à y_3.

LEMME 10. *Soient u', ϑ', σ', u, ϑ et σ comme dans le lemme 7. Alors il existe une constante c telle que, quel que soit $\delta \in]0,1[$, on ait*

$$\alpha \int_W J\chi^2 |D_n(\sum_{k,j=1}^{3} a_{kj}\partial_{y_k}U_j)|^2 dy + \tag{58}$$

$$+\frac{\alpha}{h}\int_W J\chi^2(|D_n\Sigma|^2 - |D_n\Sigma'|^2 + \frac{1}{2}|D_n(\Sigma-\Sigma')|^2)dy \leq$$

$$\leq c(\int_W J\chi^2 |D_y D_\tau U|^2 dy + \|u\|_{H^1}^2 + \|\vartheta\|_{H^1}^2 + \|F'\|_{L^2}^2) +$$

$$+\frac{c}{\delta^2}\|\sigma\|_{H^1}^4 + c\delta^2\|u\|_{H^3}^2.$$

Démonstration. Soit $x \in \omega^{(1)}$. On pose

$$\psi(x) = (\Lambda^{-1})_1(x), \quad \varphi(x) = (\Lambda^{-1})_2(x),$$

$$n = n(x) = n(\eta(\psi(x), \phi(x))).$$

Le produit scalaire de (39) avec n nous donne

$$-(\frac{\eta}{3}+\zeta)\frac{\partial}{\partial n}(\nabla\cdot u) = \eta(\Delta u - \nabla(\nabla\cdot u))\cdot n - R\frac{\partial}{\partial n}(\overline{\rho}\vartheta + \overline{T}\sigma') + F'\cdot n. \tag{59}$$

On remarque que le terme $(\Delta u - \nabla(\nabla\cdot u))\cdot n$ ne contient pas la dérivée seconde $\frac{\partial^2}{\partial n^2}u_j$, $j = 1,2,3$. On rappelle que

$$\nabla_x \cdot u = \sum_{k,j=1}^{3} a_{kj}\partial_{y_k}U_j.$$

Pour en déduire (58), nous avons besoin d'éliminer $\partial_n\sigma'$ du second membre. Pour cela comme dans la déduction de (2.13) de [16], on considère la dérivée directionnelle $\frac{\partial}{\partial n}$ de l'équation (38) ; la somme de cette équation multipliée par $\frac{1}{\rho}(\zeta + \frac{4\eta}{3})$ et du produit scalaire de l'équation (39) avec n nous donne

$$\frac{\frac{4\eta}{3}+\zeta}{h\overline{\rho}}\frac{\partial}{\partial n}(\sigma-\sigma') + R\overline{T}\frac{\partial}{\partial n}\sigma' = \eta(\Delta u - \nabla(\nabla\cdot u))\cdot n - R\overline{\rho}\frac{\partial}{\partial n}\vartheta + \tag{60}$$

$$+F' \cdot n - \frac{\frac{4\eta}{3}+\zeta}{\overline{\rho}}\nabla(\nabla\cdot(\sigma u))\cdot n.$$

Cela étant, on démontre le lemme d'une manière analogue à la démonstration du lemme 2.9 de [9] et du lemme 2.5 de [16]. $\square$

LEMME 11. *Soient u', ϑ', σ', u, ϑ et σ comme dans le lemme 7. Alors il existe une constante c telle que, quel que soit* $\delta \in]0,1[$, *on ait*

$$\alpha\int_W J\chi^2|D_\tau D_n(\sum_{j,k=1}^{3} a_{kj}\partial_{y_k}U_j)|^2dy+ \tag{61}$$

$$+\frac{\alpha}{h}\int_W J\chi^2(|D_\tau D_n\Sigma|^2-|D_\tau D_n\Sigma'|^2+\frac{1}{2}|D_\tau D_n(\Sigma-\Sigma')|^2)dy\leq$$

$$\leq c(\int_W J\chi^2|D_\tau D_y D_\tau U|^2dy+\|u\|_{H^2}^2+\|\vartheta\|_{H^2}^2+\|F'\|_{H^1}^2)+$$

$$+\frac{c}{\delta}\|\sigma\|_{H^2}^4+c\delta\|u\|_{H^3}^2.$$

$$\alpha\int_W J\chi^2|D_n D_n(\sum_{j,k=1}^{3} a_{kj}\partial_{y_k}U_j)|^2dy+ \tag{62}$$

$$+\frac{\alpha}{h}\int_W J\chi^2(|D_n D_n\Sigma|^2-|D_n D_n\Sigma'|^2+\frac{1}{2}|D_n D_n(\Sigma-\Sigma')|^2)dy\leq$$

$$\leq c(\int_W J\chi^2|D_n D_y D_\tau U|^2dy+\|u\|_{H^2}^2+\|\vartheta\|_{H^2}^2+\|F'\|_{H^1}^2)+$$

$$+\frac{c}{\delta}\|\sigma\|_{H^2}^4+c\delta\|u\|_{H^3}^2.$$

Démonstration. En utilisant toujours (59) et (60) le lemme se démontre de manière analogue à la démonstration du lemme 2.9 de [9] et du lemme 2.6 de [16]. $\square$

Maintenant nous avons besoin d'une estimation de $\int\chi^2|D_\tau D_y D_n U|^2dy$.

LEMME 12. *Soient u', ϑ', σ', u, ϑ et σ comme dans le lemme 7. Alors il existe une constante c telle que, quel que soit* $\delta \in]0,1[$, *on ait*

$$\int_W J\chi^2|D_y^2 D_\tau U|^2dy+\int_W J\chi^2|D_y D_\tau(\overline{\rho}\vartheta+\overline{T}\sigma')|^2dy\leq \tag{63}$$

$$\leq c(\int_W J\chi^2|D_\tau D_y(\sum_{j,k=1}^{3} a_{kj}\partial_{y_k}U_j)|^2dy+\|u\|_{H^2}^2+\|\sigma'\|_{H^1}^2+\|\vartheta\|_{H^1}^2+\|F'\|_{H^1}^2).$$

Démonstration. Le lemme se démontre de manière analogue à la démonstration du lemme 2.10 de [9] et du lemme 2.7 de [16]. □

En adjoinant les inégalités obtenues ci-dessus, on a les lemmes suivants.

LEMME 13. *Soient u', ϑ', σ', u, ϑ et σ comme dans le lemme 7. Alors il existe une constante c telle que, quel que soit* $\delta \in]0,1[$, *on ait*

(64)
$$\alpha \int_W J\chi^2 \big(|D_\tau D_y U|^2 + |D_\tau D_y \vartheta|^2 + |D_\tau \vartheta|^2\big) dy +$$
$$+\alpha \int_W J\chi^2 |D_n(\sum_{k,j=1}^{3} a_{kj}\partial_{y_k} U_j)|^2 dy +$$
$$+\frac{\alpha}{h}\int_W J\chi^2 (|D_\tau \Sigma|^2 - |D_\tau \Sigma'|^2 + \frac{1}{2}|D_\tau(\Sigma - \Sigma')|^2) dy +$$
$$+\frac{\alpha}{h}\int_W J\chi^2 (|D_n \Sigma|^2 - |D_n \Sigma'|^2 + \frac{1}{2}|D_n(\Sigma - \Sigma')|^2) dy \leq$$
$$\leq c(\|F'\|^2_{L^2} + \|G'\|^2_{L^2} + \|\vartheta\|^2_{H^1}) + \frac{c}{\delta^6}(\|u\|^2_{H^1} + \|\sigma\|^4_{H^1}) +$$
$$+c\delta^2(\|\nabla(\overline{\rho}\vartheta + \overline{T}\sigma')\|^2_{L^2} + \|u\|^2_{H^3}).$$

Démonstration. En multipliant l'inégalité (58) par un nombre convenable et en l'adjoignant à (56), on obtient (64). □

LEMME 14. *Soient u', ϑ', σ', u, ϑ et σ comme dans le lemme 7. Alors il existe une constante c telle que, quel que soit* $\delta \in]0,1[$, *on ait*

(65)
$$\alpha \int_W J\chi^2 \big(|D_\tau^2 D_y U|^2 + |D_y^2 D_\tau U|^2 + |D_\tau D_n(\sum_{j,k=1}^{3} a_{kj}\partial_{y_k} U_j)|^2\big) dy +$$
$$+\alpha \int_W J\chi^2 |D_n D_n(\sum_{j,k=1}^{3} a_{kj}\partial_{y_k} U_j)|^2 dy +$$
$$+\frac{\alpha}{h}\int_W J\chi^2 \big(|D_\tau^2 \Sigma|^2 - |D_\tau^2 \Sigma'|^2 + \frac{1}{2}|D_\tau^2(\Sigma - \Sigma')|^2\big) dy +$$
$$+\frac{\alpha}{h}\int_W J\chi^2 \big(|D_\tau D_n \Sigma|^2 - |D_\tau D_n \Sigma'|^2 + \frac{1}{2}|D_\tau D_n(\Sigma - \Sigma')|^2\big) dy +$$
$$+\frac{\alpha}{h}\int_W J\chi^2 \big(|D_n D_n \Sigma|^2 - |D_n D_n \Sigma'|^2 + \frac{1}{2}|D_n D_n(\Sigma - \Sigma')|^2\big) dy \leq$$
$$\leq c(\|F'\|^2_{H^1} + \|\vartheta\|^2_{H^2} + \|\sigma'\|^2_{H^1}) + \frac{c}{\delta}(\|u\|^2_{H^2} + \|\sigma\|^4_{H^2}) + c\delta(\|u\|^2_{H^3} + \|\nabla(\overline{\rho}\vartheta + \overline{T}\sigma')\|^2_{H^1}).$$

Démonstration. En multipliant chacune des inégalités (57), (61), (62) et (63) par un nombre convenable et en faisant la somme d'elles, on obtient (65). □

6. Application du théorème du point fixe de Schauder.

L'existence d'une solution dans $H_a^3 \times H_b^2 \times H_c^2$ du système (30)-(32) avec les conditions (35), (9) et (36) sera obtenue à l'aide du théorème de Schauder comme point fixe de l'opérateur Φ défini dans le paragraph 4 (voir (48)). On va d'abord démontrer le lemme suivant.

LEMME 15. *On suppose que $\|f\|_{H^1}$ et $\|\nabla \cdot E(\overline{T})\|_{L^2}$ sont assez petits. Alors il existe une constante d, $0 < d \leq 1$, et une norme $\|\cdot\|_{\widehat{H}^2_\sigma}$ équivalente à la norme $\|\cdot\|_{H^2}$ telles que*

$$\Phi(B) \subset B, \tag{66}$$

où $\Phi(\cdot)$ est l'opérateur défini par (48) *et*

$$B = \{(u,\vartheta,\sigma) \in H_a^3(\Omega) \times H_b^2(\Omega) \times H_c^2(\Omega) | \|u\|_{H^3}^2 + \|\vartheta\|_{H^2}^2 + \|\sigma\|_{\widehat{H}^2_\sigma}^2 \leq d^2\}. \tag{67}$$

Démonstration. Il est clair qu'il existe une constante $\widetilde{d} > 0$ telle que, si $\|\vartheta\|_{H^2} \leq \widetilde{d}$ alors on a $\|\vartheta\|_{L^\infty} \leq \frac{\overline{T}}{2}$; donc en vertu des lemmes 4-6 on peut définir $(u,\vartheta,\sigma) = \Phi(u',\vartheta',\sigma')$ pour $(u',\vartheta',\sigma') \in B$ si on choisit un d tel que $0 < d \leq \widetilde{d}$. Cela étant, pour démontrer le lemme, nous allons suivre l'idée de Farwig [9]. En effet, le choix des familles $\{\omega_k^{(0)}\}_{k=0}^N$ et $\{\omega_k^{(1)}\}_{k=0}^N$ de sous-ensembles de Ω (on rappelle entre autres que $\bigcup_{k=0}^N \omega_k^{(0)} = \Omega$) et les propriétés du changement de variables $x \to y = (\psi,\varphi,r) = \Lambda^{-1}(x)$ et de fonctions inconnues $(u,\vartheta,\sigma) \to (U,\Theta,\Sigma)$ nous permettent de déduire de (64), (65) les inégalités qui nous conduisent à la démonstration du lemme 15. Plus précisément, en rappelant que $\sum_{j,k=1}^3 a_{kj}\partial_{y_k} U_j = \nabla \cdot u$ et les propriétés des fonctions χ_k et en faisant la somme des inégalités (64) pour $\omega^{(1)} = \omega_k^{(1)}$, $k = 1,\cdots,N$, de l'inégalité (51) et de l'inégalité (49) multipliée par un nombre convenable d'ordre $c\delta^{-6}$, on voit qu'il existe une autre constante c (nous la notons toujour c pour ne pas alourdir les notations) telle que

$$\begin{aligned} &\alpha\|D_x\nabla\cdot u\|_{L^2}^2 + \frac{\alpha}{\delta^6}(\|\nabla u\|_{L^2}^2 + \|\vartheta\|_{H^1}^2) + \\ &+ \frac{\alpha}{h}(\|D_x\sigma\|_{L^2}^2 - \|D_x\sigma'\|_{L^2}^2) + \frac{\alpha}{h\delta^6}(\|\sigma\|_{L^2}^2 - \|\sigma'\|_{L^2}^2) \leq \\ &\leq \frac{c}{\delta^6}(\|F'\|_{L^2}^2 + \|G'\|_{L^2}^2) + \frac{c}{\delta^{14}}\|\sigma\|_{H^1}^4 + c\delta^2(\|u\|_{H^3}^2 + \|\nabla(\overline{\rho}\vartheta + \overline{T}\sigma')\|_{L^2}^2). \end{aligned} \tag{68}$$

De manière analogue, en faisant la somme des inégalités (65) pour $\omega^{(1)} = \omega_k^{(1)}$, $k = 1,\cdots,N$ et l'inégalité (52), on voit qu'il existe une constante c telle que

$$\alpha\|D_x^2\nabla\cdot u\|_{L^2}^2 + \frac{\alpha}{h}(\|D_x^2\sigma\|_{L^2}^2 - \|D_x^2\sigma'\|_{L^2}^2) \leq \tag{69}$$

$$\leq c(\|F'\|^2_{H^1} + \|\sigma'\|^2_{H^1} + \|\vartheta\|^2_{H^2}) + \frac{c}{\delta}(\|\sigma\|^4_{H^2} + \|u\|^2_{H^2}) +$$
$$+ c\delta(\|u\|^2_{H^3} + \|\nabla(\overline{\rho}\vartheta + \overline{T}\sigma')\|^2_{H^1}).$$

Rappelons les inégalités établies dans [9]

$$\|u\|_{H^{k+2}} + \|\nabla(\overline{\rho}\vartheta + \overline{T}\sigma')\|_{H^k} \leq c(\|F'\|_{H^k} + \|\nabla \cdot u\|_{H^{k+1}}), \tag{70}$$

$$\|\nabla\sigma'\|^2_{H^k} \leq c\|\nabla(\overline{\rho}\vartheta + \overline{T}\sigma')\|^2_{H^k} + c\|\nabla\vartheta\|^2_{H^k}, \quad \text{pour} \quad k = 0, 1, \tag{71}$$

qui nous permettent d'écrire les inégalités dans une forme plus convenable. En effet, en faisant la somme de l'inégalité (68) et de l'inégalité (70) multipliée par $c\delta^2$, on aura

$$\alpha\|D_x\nabla \cdot u\|^2_{L^2} + \frac{\alpha}{\delta^6}(\|\nabla u\|^2_{L^2} + \|\vartheta\|^2_{H^1}) + \frac{\alpha}{h}(\|D_x\sigma\|^2_{L^2} - \|D_x\sigma'\|^2_{L^2}) + \tag{72}$$
$$+ \frac{\alpha}{h\delta^6}(\|\sigma\|^2_{L^2} - \|\sigma'\|^2_{L^2}) \leq$$
$$\leq \frac{c}{\delta^6}(\|F'\|^2_{H^1} + \|G'\|^2_{L^2}) + \frac{c}{\delta^{14}}\|\sigma\|^4_{H^1} + c\delta^2\|\nabla \cdot u\|^2_{H^2}.$$

En outre, à l'aide des inégalités (43), (70), (71) (ainsi que l'inégalité de Poincaré), on peut déduire de (69) l'inégalité

$$\alpha\|D_x^2\nabla \cdot u\|^2_{L^2} + \frac{\alpha}{h}(\|D_x^2\sigma\|^2_{L^2} - \|D_x^2\sigma'\|^2_{L^2}) \leq \tag{73}$$
$$\leq \frac{c}{\delta}(\|F'\|^2_{H^1} + \|\sigma\|^4_{H^2} + \|\nabla \cdot u\|^2_{H^1}) + c(\|G'\|^2_{L^2} + \|\nabla \cdot u\|^2_{L^2}) + c\delta\|\nabla \cdot u\|^2_{H^2}.$$

D'autre part, en multipliant chacune des inégalités (72), (49) et (43) par un nombre convenable et en faisant la somme d'elles avec (73) de telle sorte que le terme $\|\nabla \cdot u\|^2_{H^1}$ soit éliminé du second membre, on obtient

$$\alpha\|D_x^2\nabla \cdot u\|^2_{L^2} + \alpha\|\vartheta\|^2_{H^2} + \frac{\alpha}{h}(\|D_x^2\sigma\|^2_{L^2} - \|D_x^2\sigma'\|^2_{L^2}) + \tag{74}$$
$$+ \frac{\alpha}{h\delta}(\|D_x\sigma\|^2_{L^2} - \|D_x\sigma'\|^2_{L^2}) + \frac{\alpha}{h\delta^7}(\|\sigma\|^2_{L^2} - \|\sigma'\|^2_{L^2}) \leq$$
$$\leq \frac{c}{\delta^7}(\|F'\|^2_{H^1} + \|G'\|^2_{L^2}) + \frac{c}{\delta^{15}}\|\sigma\|^4_{H^2} + c\delta\|\nabla \cdot u\|^2_{H^2} + c\delta\|u\|^2_{H^3}.$$

En multipliant chacune des inégalités (74), (72) et (49) par un nombre convenable et en faisant la somme d'elles, en utilisant l'inégalité (45) (ainsi que l'inégalité de Poincaré) et en choisissant $\delta > 0$ suffisamment petit, on voit qu'il existe une norme $\|\cdot\|_{\widetilde{H}^2_\sigma}$ équivalente à la norme de H^2 et une constante c telles que

$$\alpha\|u\|^2_{H^3} + \alpha\|\vartheta\|^2_{H^2} + \frac{\alpha}{h}(\|\sigma\|^2_{\widetilde{H}^2_\sigma} - \|\sigma'\|^2_{\widetilde{H}^2_\sigma}) \leq$$

$$\leq \frac{c}{\delta^7}(\|F'\|^2_{H^1}+\|G'\|^2_{L^2})+\frac{c}{\delta^{15}}\big(\|\sigma'\|^4_{H^2}+\|u\|^4_{H^3}\big).$$

En outre, des inégalités (70) et (71) on déduit que

$$\|\sigma'\|^2_{\widetilde{H}^2_\sigma}\leq c(\|F'\|^2_{H^1}+\|\nabla\vartheta\|^2_{H^1}+\|\nabla\cdot u\|^2_{H^2}).$$

En adjoignant ces deux inégalités (multipliées chacune par un nombre convenable), on déduit qu'il existe deux nombres strictement positifs d_0 et ε_1 tels que l'on ait

(75) $$\alpha\|u\|^2_{H^3}+\alpha\|\vartheta\|^2_{H^2}+\frac{\alpha}{h}(\|\sigma\|^2_{\widetilde{H}^2_\sigma}-\|\sigma'\|^2_{\widetilde{H}^2_\sigma})+\varepsilon_1\|\sigma'\|^2_{\widetilde{H}^2_\sigma}\leq$$

$$\leq \frac{c}{\delta^7}(\|F'\|^2_{H^1}+\|G'\|^2_{L^2})+\frac{c}{\delta^{15}}\|\sigma'\|^4_{H^2},$$

pourvu que $\|u\|_{H^3}\leq d_0$. Donc, en vertu de (46) et (47) il existe une constante c telle que

(76) $$\alpha\|u\|^2_{H^3}+\alpha\|\vartheta\|^2_{H^2}+\frac{\alpha}{h}\|\sigma\|^2_{\widetilde{H}^2_\sigma}\leq(\frac{\alpha}{h}-\varepsilon_1)\|\sigma'\|^2_{\widetilde{H}^2_\sigma}+$$

$$+c(\|f\|^2_{H^1}+\|\nabla\cdot E(\overline{T})\|^2_{L^2}+(\|u'\|^2_{H^3}+\|\vartheta'\|^2_{H^2}+\|\sigma'\|^2_{\widetilde{H}^2_\sigma})^2)$$

pourvu que $\|u\|_{H^3}\leq d_0$.

De (76) il résulte que, si $\|f\|_{H^1}$ et $\|\nabla\cdot E(\overline{T})\|_{L^2}$ sont suffisamment petites, il existe un nombre d, $0<d\leq d_0$, tel que, si $\|u'\|^2_{H^3}+\|\vartheta'\|^2_{H^2}+\frac{1}{h}\|\sigma'\|^2_{\widetilde{H}^2_\sigma}\leq d^2$, alors on ait $\|u\|^2_{H^3}+\|\vartheta\|^2_{H^2}+\frac{1}{h}\|\sigma\|^2_{\widetilde{H}^2_\sigma}\leq d^2$. C'est-à-dire, si on pose $\|\sigma\|_{\widehat{H}^2_\sigma}=\frac{1}{\sqrt{h}}\|\sigma\|_{\widetilde{H}^2_\sigma}$, en rappelant (67), on a $\Phi(B)\subset B$, ce qui achève la démonstration du lemme 15. $\square$

Maintenant on va démontrer la continuité de l'opérateur Φ dans l'ensemble B par rapport à la topologie de $H^1(\Omega)\times H^1(\Omega)\times L^2(\Omega)$.

LEMME 16. *Il existe une constante c telle que, pour tout* $(u_1',\vartheta_1',\sigma_1'),(u_2',\vartheta_2',\sigma_2')\in B$*, on ait*

(77) $$\|u_1-u_2\|_{H^1}+\|\vartheta_1-\vartheta_2\|_{H^1}+\|\sigma_1-\sigma_2\|_{L^2}\leq$$

$$\leq c(\|u_1'-u_2'\|_{H^1}+\|\vartheta_1'-\vartheta_2'\|_{H^1}+\|\sigma_1'-\sigma_2'\|_{L^2}+\|\sigma_1'-\sigma_2'\|^{\frac{1}{2}}_{L^2}),$$

où $(u_i,\vartheta_i,\sigma_i)=\Phi(u_i',\vartheta_i',\sigma_i')$, $i=1,2$.

Démonstration. Posons

$$U'=u_1'-u_2',\quad \Theta'=\vartheta_1'-\vartheta_2',\quad S'=\sigma_1'-\sigma_2',$$

$$U=u_1-u_2,\quad \Theta=\vartheta_1-\vartheta_2,\quad S=\sigma_1-\sigma_2.$$

Comme u_i,ϑ_i et σ_i $(i=1,2)$ doivent vérifier les équations (38)-(40), pour Θ,U,S on a

(78) $$S=S'-h\overline{\rho}\nabla\cdot U-h(\nabla\cdot(Su_1)+\nabla\cdot(\sigma_2U)),$$

(79)
$$-\eta\Delta U-(\frac{1}{3}\eta+\xi)\nabla(\nabla\cdot U)+R\overline{\rho}\nabla\Theta=$$
$$=F(u_1',\vartheta_1',\sigma_1')-F(u_2',\vartheta_2',\sigma_2')-R\overline{T}\nabla S',$$

(80)
$$-\kappa\Delta\Theta+\overline{\beta}_0'\Theta=G(u_1',\vartheta_1',\sigma_1')-G(u_2',\vartheta_2',\sigma_2')-R\overline{\rho}\overline{T}\nabla\cdot U,$$

où $F(\cdot,\cdot,\cdot)$ et $G(\cdot,\cdot,\cdot)$ sont les fonctions difinies dans (33) et (34).

Pour obtenir une estimation de $\|S\|_{L^2}$, on va multiplier les deux membres de (78) par S et les intégrer sur Ω. On remarque que

$$\int_\Omega S\nabla\cdot(Su_1)dx=-\frac{1}{2}\int_\Omega S^2\nabla\cdot u_1dx$$

et

$$\|\nabla\cdot u_1\|_{L^\infty}\le c'\|u_1\|_{H^3}\le c'd$$

avec une constante c' (d est la constante introduite dans (67)). D'autre part, on a

$$\|\nabla\cdot(\sigma_2U)\|_{L^2}\le c''\|\sigma_2\|_{\widehat{H}^2_\sigma}\|U\|_{H^1}\le c''d\|U\|_{H^1}$$

avec une constante c''. En tenant compte de ces relations, du produit scalaire des deux memebres de (78) on obtient

$$\|S\|^2_{L^2}\le\|S'\|_{L^2}\|S\|_{L^2}+h\overline{\rho}\|S\|_{L^2}\|U\|_{H^1}+h\frac{c'd}{2}\|S\|^2_{L^2}+hc''d\|S\|_{L^2}\|U\|_{H^1}.$$

Le choix d'un h suffisament petit nous permet de supposer que $hc'd\le\frac{1}{2}$. Donc, on déduit de l'inégalité précédente qu'il existe une constante c_1 telle que

(81)
$$\|S\|_{L^2}\le 2\|S'\|_{L^2}+c_1\|U\|_{H^1}.$$

D'autre part, d'après le lemme 4, appliqué aux équations (79) et (80), on a

(82)
$$\|U\|_{H^1}+\|\Theta\|_{H^1}\le c(\|F_1'-F_2'\|_{H^{-1}}+\|G_1'-G_2'\|_{(H^1)'}+\|S'\|_{L^2}).$$

Or, de la définition de $\beta_1(\cdot)$ (voir (28) et aussi (7), (27)) on déduit qu'il existe une constante c' telle que

$$\|\beta_1(\vartheta_1')-\beta_1(\vartheta_2')\|_{(H^1)'}\le c'\|\Theta'\|_{L^2}$$

pour ϑ_1', ϑ_2' tels que $\|\vartheta_i'\|_{H^2}\le d$, $i=1,2$. Cela étant, l'examen des expressions de $F(\cdot,\cdot,\cdot)$ et de $G(\cdot,\cdot,\cdot)$ données dans (33) et (34) nous donne

(83)
$$\|F_1'-F_2'\|_{H^{-1}}\le c(\|U'\|_{H^1}+\|\Theta'\|_{H^1}+\|S'\|_{L^2}+\|S'\|^{\frac{1}{2}}_{L^2})\times$$
$$\times(\|f\|_{H^1}+\|u_2'\|_{H^3}\|u_2'\|_{H^1}+\|\sigma_1'\|_{H^2}\|u_2'\|_{H^2}+\|u_1'\|_{H^1}\|\sigma_1'\|_{H^2}+$$
$$+\|u_2'\|_{H^2}+\|u_1'\|_{H^1}+\|\vartheta_2'\|_{H^1}+\|\sigma_1'\|_{H^1}+\|\sigma_2'\|_{H^1}+$$

$$+\|\sigma_1'\|_{H^2}^{\frac{1}{2}}\|\vartheta_1'\|_{H^1}+\|\sigma_2'\|_{H^2}^{\frac{1}{2}}\|\vartheta_1'\|_{H^1}).$$

$$\|G_1'-G_2'\|_{(H^1)'}\le c(\|U'\|_{H^1}+\|\Theta'\|_{H^1}+\|S'\|_{L^2})\times \tag{84}$$

$$\times(1+\|u_1'\|_{H^2}\|\vartheta_1'\|_{H^1}+\|\vartheta_2'\|_{H^1}\|\sigma_2'\|_{H^2}+\|u_1'\|_{H^3}\|\sigma_2'\|_{H^2}+\|\vartheta_2'\|_{H^1}+$$

$$+\|u_1'\|_{H^1}+\|u_2'\|_{H^1}+\|\vartheta_1'\|_{H^1}+\|\sigma_1'\|_{H^1}+\|\vartheta_2'\|_{H^1}\|u_2'\|_{H^3}+$$

$$+\|u_2'\|_{H^2}\|\sigma_1'\|_{H^2}+\|\vartheta_1'\|_{H^1}\|\sigma_1'\|_{H^2}+\|u_1'\|_{H^3}+\|u_2'\|_{H^3}+\|u_1'\|_{H^2}).$$

En subtituant (83) et (84) dans (82) et en y adjoignant (81) on obtient

$$\|U\|_{H^1}+\|\Theta\|_{H^1}+\|S\|_{L^2}\le c(\|U'\|_{H^1}+\|\Theta'\|_{H^1}+\|S'\|_{L^2}+\|S'\|_{L^2}^{\frac{1}{2}}),$$

d'où (77). □

Les lemmes 15 et 16 étant établis, on peut en déduire le théorème principal de ce travail.

THEOREM 1. *Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^3$ muni de la frontière $\partial\Omega$ de classe C^4. On suppose que les fonctions mesurables non-négatives $P_\lambda(q',q)$, $I_\lambda^0(x^0,q)$ et les constantes a_λ, r_λ satisfont aux conditions* (12), (20), (11), (21). *Si $\|f\|_{H^1(\Omega)}$ est assez petite et $I_\lambda^0(x^0,q)$ est telle que $\|\nabla\cdot E(\overline{T})\|_{L^2(\Omega)}$ avec $\overline{T}$ défini par le lemme 2 (avec les autres données) soit suffisamment petite, alors il existe une solution $(u,T,\rho,\{I_\lambda\}_{\lambda>0})\in H_a^3(\Omega)\times H_b^2(\Omega)\times H_c^2(\Omega)\times H^2(\Omega)$ du système d'équations* (1)-(4) *avec les conditions* (8)-(10), (16).

Démonstration. On rappelle que l'ensemble B défini dans (67) est convexe et compact dans l'espace $H^1(\Omega)\times H^1(\Omega)\times L^2(\Omega)$.

En outre en vertu du lemme 16 l'opérateur Φ est continu dans B dans la topologie de $H^1(\Omega)\times H^1(\Omega)\times L^2(\Omega)$. Donc, on déduit de (66) et du théorème de point fixe de Schauder qu'il existe un élément (u,ϑ,σ) de B tel que $\Phi(u,\vartheta,\sigma)=(u,\vartheta,\sigma)$. Si on pose $\rho=\overline{\rho}+\sigma$ et $T=\overline{T}+\vartheta$ et si on définit I_λ par le lemme 1, on voit que $(u,T,\rho,\{I_\lambda\}_{\lambda>0})$ est une solution du système d'équations (1)-(4) avec les conditions (8)-(10), (16), ce qui achève la démonstration du théorème 1. □

Remarque. Si on examine l'équation (17) et la démonstration des lemmes 1 et 2, on peut constater que l'hypothèse "$I_\lambda^0(x^0,q)$ est telle que $\|\nabla\cdot E(\overline{T})\|_{L^2(\Omega)}$ soit suffisamment petite" peut être vérifiée par exemple dans le cas où a_λ, r_λ et le diamètre de Ω sont petits et $I_\lambda^0(x^0,q)$ ne dépend pas de $x^0\in\partial\Omega$.

Références

[1] AMOSOV A. A. : *Correction globale du problème aux conditions initiales et aux limites pour le système d'équations de la dynamique d'un gaz visqueux avec la radiation* (en russe), Doklady Akad. Nauk SSSR. **280** (1985), 1326–1329.

[2] BEIRAO DA VIEGA H. : *Existence results in Sobolev spaces for a stationary transport equation*, Ricerche di Matematica Suppl. **36** (1987), 173–184.

[3] BENABIDALLAH R., TALEB L., FUJITA YASHIMA H. : *Existence d'une solution stationnaire d'un système d'équations d'un fluide visqueux compressible et calorifère modélisant la convection*. Bollettino U.M.I. **10-B** (2007), 1101–1124.

[4] DUCOMET B., NEČASOVÁ Š. : *Global weak solution to the 1D compressible Navier-Stokes equations with radiation*. Comm. Math. Anal. **8** (2010), 23–65.

[5] DUCOMET B., NEČASOVÁ Š. : *Global existence of solutions for the one-dimensional motions of a compressible viscous gas with radiation : An "infrarelativistic model"*. Nonlinear Analysis **72** (2010), 3258–3274.

[6] DUCOMET B., FEIREISL E., NEČZSOVÁ Š. : *On a model in radiation hydrodynamics*. Ann. I. H. Poincaré - A. N. **28** (2011), 797–812.

[7] DUCOMET B., NEČZSOVÁ Š. : *Large-time behavior of the motion of a viscous heat-conducting one-dimensional gas coupled to radiation*, Annali di Matematica **191** (2012), 219–260.

[8] DUCOMET B., NEČZSOVÁ Š. : *Asymptotic behavior of the mof a viscous heat-conducting one-dimensional gas with radiation : the pure scattering case*. Analysis and Applications **11** (2013), (29 pages).

[9] FARWIG R. : *Stationary solutions of compressible Navier-Stokes equations with slip boundary conditions*, Comm. Part. Diff. Eq. **14** (1989), 1579–1606.

[10] Landau L. L., Lifchitz E. M. : *Mécanique des fluides (Physique théorique, tome 6)* (traduit du russe). Mir, 1989.

[11] LIOU K. N. : *An introduction to atmospheric radiation*. Acad. Press, 2002.

[12] MAZ'YA V. G., PLAMENEVESKII B. A., STUPYALIS L. I. : *The three-dimensional probleme of steady-state motion of a fluid with a free surface*. Trans. Amer. Math. Soc. **123** (1984), 171–268.

[13] MESSAADIA N., FUJITA YASHIMA H. : *Solution stationnaire du système d'équations de la radiation et de la tempèrature dans l'air*, Serdica Math. J. **39** (2013), 1001–1020.

[14] Mikhailov V. P. : *Equations aux dérivées partielles* (traduit du russe). Mir, 1980.

[15] VALLI A. : *Periodic and stationary solution for compressible Navier-Stokes equations via a stability method*. Ann. Scuola Norm. Super. Pisa Cl. Sci. Ser. IV **10** (1983), 607–647.

[16] VALLI A. : *On the existence of stationary solution to compressible Navier-Stokes equation*. Ann. I. H. Poincaré **4** (1987), 99–113.

AMS Subject Classification : 35Q79, 35J61

Meryem BENSSAAD, Fateh ELLAGGOUNE
Laboratoire de Mathématiques appliquées et de modélisation, Université 8 mai 1945, Guelma
P.O. Box 401, Guelma 24000, Algérie.
e-mail : `benssaad.meryem@gmail.com, fellaggoune@gmail.com`

Lavoro pervenuto in redazione il 21.01.2015 e, in versione definitiva, il 07.04.2015.