Rend. Sem. Mat. Univ. Pol. Torino
Vol. 67, 1 (2009), 55 – 89

F.Z. Demmad-Abdessameud

POLYNÔME DE HUA, NOYAU DE BERGMAN DES DOMAINES DE CARTAN-HARTOGS ET PROBLÈME DE LU QIKENG

Résumé. Réduction du problème de Lu Qikeng pour les domaines de Cartan-Hartogs $\widehat{\Omega}_m(\mu)$ à un problème algébrique sur les polynômes de Hua. Solution complète du problème de Lu Qikeng quand le domaine de base Ω est un domaine symétrique de dimension inférieure ou égale à 4.

1. Introduction

Le *problème de Lu Qikeng* pour un ouvert U de $\mathbb{C}^n$ consiste à déterminer si le noyau de Bergman $K_U(z,w)$ de ce domaine peut avoir des zéros. Ce problème a été posé par Lu Qikeng en 1966. Le nom de *conjecture de Lu Qikeng* a été donné (par M. Skwarsczynski en 1969) à l'hypothèse suivant laquelle le noyau de Bergman d'un ouvert n'aurait pas de zéros. Un domaine U sera appelé *domaine de Lu Qikeng* si son noyau de Bergman ne s'annule pas dans $U \times U$.

Soit Ω un domaine homogène borné cerclé irréductible, $N(z,t)$ sa norme générique, χ son polynôme de Hua. Pour $\mu > 0$ et m entier positif, on considère le *domaine de Cartan–Hartogs* $\widehat{\Omega}_m(\mu)$ construit au-dessus de Ω :

$$\widehat{\Omega}_m(\mu) = \left\{(z,Z) \in \Omega \times \mathbb{C}^m, \quad \|Z\|^2 < N(z,z)^{\mu}\right\}.$$

Les domaines de Cartan–Hartogs ont été introduits en 1998 par G. Roos et Weiping Yin ; ils généralisent les ellispsoïdes complexes, qui correspondent au cas où Ω est le disque unité de $\mathbb{C}$. *Ces domaines sont en général non homogènes, mais les orbites du groupe d'automorphismes sont alors paramétrées par* $[0,1[$. Le noyau de Bergman de ces domaines a été obtenu dans le cas général dans [5] ; cf. également [6].

Dans cet article, nous étudions le problème de Lu Qikeng pour les domaines de Cartan–Hartogs. Nous montrons (théorème 4) qu'il se réduit à la localisation, par rapport à la droite $\left\{\operatorname{Re}\eta = \frac{1}{2}\right\}$, des racines d'un polynôme P_{μ}^{m} ; ce polynôme, de degré égal à la dimension d de Ω, se déduit du polynôme de Hua de Ω par une transformation combinatoire.

Nous appliquons ensuite ce théorème à la solution complète du problème de Lu Qikeng pour les domaines $\widehat{\Omega}_m(\mu)$ lorsque Ω est un domaine symétrique irréductible de dimension au plus 4. Les résultats font apparaître la situation suivante, dont on conjecture qu'elle se généralise pour toute base Ω : pour Ω et $m \geq 1$ fixés, il existe $\mu_{\Omega,m}$, $0 < \mu_{\Omega,m} \leq \infty$ tel que $\widehat{\Omega}_m(\mu)$ est un domaine de Lu Qikeng si et seulement si $0 < \mu \leq \mu_{\Omega,m}$. La borne $\mu_{\Omega,m}$ est caractérisée comme la plus petite racine positive du polynôme $q_m(\mu) = P_{\mu}^{m}\left(\frac{1}{2}\right)$; on a $\mu_{\Omega,m} = +\infty$ pour m assez grand. De plus, si le domaine Ω n'est pas un domaine de Lu Qikeng, i.e. si $\mu > \mu_{\Omega,m}$, il est possible de préciser le nombre de racines de P_μ^m dans $\left\{\operatorname{Re}\eta > \frac{1}{2}\right\}$, de vérifier que celles-ci sont toujours réelles et de décrire la variété des points de $\widehat{\Omega}_m(\mu) \times \widehat{\Omega}_m(\mu)$ où le noyau de Bergman de $\widehat{\Omega}_m(\mu)$ s'annule.

Les résultats obtenus lorsque la base Ω est un domaine symétrique irréductible de dimension au plus 4 fournissent un grand nombre d'exemples de domaines de Lu Qikeng et de domaines qui n'ont pas cette propriété. Contrairement au cas générique d'un domaine borné de $\mathbb{C}^n$, qui n'est pas de Lu Qikeng (cf. [3]), « la plupart »des domaines $\widehat{\Omega}_m(\mu)$ sont des domaines de Lu Qikeng. En effet, le domaine $\widehat{\Omega}_m(\mu)$ est un domaine de Lu Qikeng pour $m \geq m_\Omega$ et pour tout $\mu > 0$, où m_Ω est un entier qui dépend de la base Ω ; pour $1 \leq m < m_\Omega$, le domaine $\widehat{\Omega}_m(\mu)$ est de Lu Qikeng si et seulement si $0 < \mu \leq \mu_m$.

Ce travail est organisé comme suit : Dans les sections 2 et 3, nous rappelons la définition du polynôme de Hua d'un domaine symétrique Ω et le calcul du noyau de Bergman de $\widehat{\Omega}_m(\mu)$. La section 4 est essentiellement consacrée à la démonstration du théorème de réduction 4.

La section 5 décrit la solution complète du problème de Lu Qikeng pour $\widehat{\Omega}_m(\mu)$ lorsque la base Ω est de dimension au plus 4 ; les résultats généralisent des résultats obtenus par Yin Weiping [7], Zhang Liyou et Park Jong-do (2006, non publié) lorsque $m = 1$ et que Ω est une boule hermitienne de dimension 3 ou 4. Pour alléger cette section, les résultats auxiliaires utilisés dans ces cas particuliers ont été regroupés dans l'annexe 7.

Enfin, l'annexe 6 regroupe les critères utilisés pour la localisation des racines de polynômes par rapport à $\left\{\operatorname{Re} z < \frac{1}{2}\right\}$. En degrés 3 et 4, ces critères sont déduits du critère de stabilité classique de Routh–Hurwitz et du critère de Liénard et Chipart.

L'auteur remercie Guy Roos pour ses conseils pendant la préparation de ce travail, ainsi que le referee pour ses remarques.

2. Polynômes du type de Hua

2.1. Définition

On considère un triplet (a, b, r) d'entiers naturels, avec $r > 0$. Le *polynôme du type de Hua* $\chi = \chi_{a,b,r}$ est le polynôme défini par :

$$\chi(s) = \chi_{a,b,r}(s) = \prod_{j=1}^{r} \left(s + 1 + (j-1)\tfrac{a}{2}\right)_{1+b+(r-j)a}, \tag{1}$$

où $(s)_k$ désigne la factorielle croissante

$$(s)_k = s(s+1)\dots(s+k-1) = \frac{\Gamma(s+k)}{\Gamma(s)}.$$

On a

$$\deg \chi = d = r + \tfrac{r(r-1)}{2} a + rb. \tag{2}$$

En effet, on a

$$\deg\chi = \sum_{j=1}^{r}\left(1+b+(r-j)\,a\right) = r + rb + \tfrac{r(r-1)}{2}a.$$

Le polynôme χ est lié à l'*intégrale de Selberg* [1], pour $\operatorname{Re}s > -1$, par

$$\int_0^1 \cdots \int_0^1 \prod_{j=1}^{r}(1-t_j)^s t_j^b \prod_{1\le j<k\le r}\left|t_j - t_k\right|^a \,\mathrm{d}t_1 \ldots \mathrm{d}t_r = \tfrac{C(a,b,r)}{\chi(s)}, \tag{3}$$

où

$$C(a,b,r) = \prod_{j=1}^{r}\tfrac{\Gamma(b+1+(j-1)\frac{a}{2})\Gamma(j\frac{a}{2}+1)}{\Gamma(\frac{a}{2}+1)}.$$

2.2. Polynômes de Hua des domaines hermitiens symétriques

Soit Ω un domaine hermitien symétrique irréductible. On désigne par N la *norme* générique de Ω et par a,b,r ses invariants numériques. L'*intégrale de Hua* $\int_\Omega N(z,z)^s\omega(z)$ de Ω est donnée par

$$\int_\Omega N(z,z)^s\omega(z) = \tfrac{\chi(0)}{\chi(s)}\int_\Omega \omega \qquad (\operatorname{Re}s > -1) \tag{4}$$

(cf. [5]), où $\chi = \chi_{a,b,r}$.

Il est bien connu que le noyau reproduisant de l'espace à poids

$$H\left(\Omega, N(z,z)^s\right)$$

est

$$K_{\Omega,s}(z,t) = C_s N(z,t)^{-g-s},$$

où C_s est une constante dépendant de s. Nous rappelons ci-dessous la démonstration et précisons la relation entre C_s et $\chi(s)$.

LEMME 1. *Soit Ω un domaine homogène borné cerclé irréductible, $N(z,t)$ sa norme générique, χ son polynôme de Hua. Pour $s>0$, le noyau reproduisant de l'espace à poids $H\left(\Omega, N(z,z)^s\right)$ est*

$$K_{\Omega,s}(z,t) = C_\Omega N(z,t)^{-g-s}\chi(s), \tag{5}$$

où $C_\Omega = \frac{1}{\chi(0)\operatorname{vol}(\Omega)}$.

Démonstration. Si ϕ est un automorphisme de Ω on a

$$N\left(\phi(t),\phi(t)\right)^g = \left|J\phi(t)\right|^2 N(t,t)^g. \tag{6}$$

Ceci résulte des relations

$$B\left(\phi(z),\phi(t)\right) = \mathrm{d}\phi(z)\,B(z,t)\,\mathrm{d}\phi^*(z),$$
$$\det B(z,z) = N(z,z)^g.$$

Soit

$$\|f\|_s^2 = \int_\Omega |f(t)|^2 N(t,t)^s \omega(t)$$

la norme de $H(\Omega, N(z,z)^s)$. Si ϕ est un automorphisme de Ω, on a par changement de variable dans l'intégrale et en appliquant (6),

$$\begin{aligned}\|f\|_s^2 &= \int_\Omega |f\circ\phi|^2 N(\phi(t),\phi(t))^s \omega(\phi(t)) \\ &= \int_\Omega |f\circ\phi|^2 N(t,t)^s |J\phi(t)|^{\frac{2s}{g}} |J\phi(t)|^2 \omega(t) = \left\| (f\circ\phi)\,(J\phi)^{\frac{s}{g}+1} \right\|_s^2 .\end{aligned}$$

L'application $f \longmapsto (f\circ\phi)\,(J\phi)^{\frac{s}{g}+1}$ est donc un automorphisme de l'espace de Hilbert $H(\Omega, N(z,z)^s)$. Le noyau reproduisant de cet espace vérifie donc la relation de transformation

$$K_{\Omega,s}(z,z) = |J\phi(z)|^{\frac{2s}{g}+2} K_{\Omega,s}(\phi(z),\phi(z)).$$

Soit $z \in \Omega$ et $\phi \in \operatorname{Aut}\Omega$ tel que $\phi(z) = 0$; comme $N(0,0) = 1$, on déduit de (6)

$$N(z,z)^g = |J\phi(z)|^{-2},$$

d'où $K_{\Omega,s}(z,z) = C_s N(z,z)^{-g-s}$, avec $C_s = K_{\Omega,s}(0,0)$. On a donc

$$K_{\Omega,s}(z,t) = C_s N(z,t)^{-g-s},$$

les deux membres étant analytiques réels. En particulier, $K_{\Omega,s}(0,t) = C_s$ et $1 = C_s \int N(t,t)^s \omega$; d'où, en utilisant (4), $C_s = \frac{\chi(s)}{\chi(0)\operatorname{vol}\Omega} = C_\Omega \chi(s)$. $\square$

3. Noyau de Bergman des domaines de Cartan-Hartogs

3.1. Noyau de Bergman virtuel

Soit V un espace vectoriel hermitien de dimension finie n, dont on note $\|\ \| = \|\ \|_V$ la norme hermitienne et $\omega_V(z) = \left(\frac{\mathrm{i}}{2\pi}\partial\overline{\partial}\|z\|^2\right)^n$ la forme volume associée. Soit Ω un domaine de V et $p : \Omega \to]0,+\infty[$ une fonction continue positive sur Ω. L'espace des fonctions holomorphes sur Ω est noté $\operatorname{Hol}(\Omega)$. On note $H(\Omega)$ l'espace de Bergman

$$H(\Omega) = H(\Omega,\omega_V) = \left\{ f \in \operatorname{Hol}(\Omega) \mid \|f\|_\Omega^2 = \int_\Omega |f(z)|^2 \omega_V(z) < \infty \right\}$$

et $H(\Omega, p) = H(\Omega, p\omega_V)$ l'espace de Bergman à poids

$$H(\Omega, p\omega_V) = \left\{ f \in \operatorname{Hol}(\Omega) \mid \|f\|_{\Omega,p}^2 = \int_\Omega |f(z)|^2 p(z)\omega_V(z) < \infty \right\}.$$

Les produits scalaires de ces espaces de Hilbert sont notés respectivement $(\,|\,)_{\Omega}$ et $(\,|\,)_{\Omega,p}$. Le noyau de Bergman de Ω (noyau reproduisant de $H(\Omega)$) est noté $K_{\Omega}(z,t)$; il est entièrement déterminé par la fonction analytique-réelle $\mathcal{K}_{\Omega}$:

$$\mathcal{K}_{\Omega}(z) = K_{\Omega}(z,z) \qquad (z \in \Omega)\,,$$

qui est aussi appelée noyau de Bergman de Ω. De la même manière, le noyau de Bergman à poids de (Ω,p) (noyau reproduisant de $H(\Omega,p)$) est noté $K_{\Omega,p}(z,t)$ et est entièrement déterminé par $\mathcal{K}_{\Omega,p}(z) = K_{\Omega,p}(z,z)$.

DÉFINITION 1. *Soient Ω un domaine dans V et $p : \Omega \to]0,+\infty[$ une fonction continue sur Ω. On note $K_{\Omega,p^k}(z,w)$ (resp. $\mathcal{K}_{\Omega,p^k}(z)$) le noyau de Bergman à poids de $\left(\Omega,p^k\right)$. On appelle* noyau de Bergman virtuel *de (Ω,p) la fonction définie par*

$$L_{\Omega,p}(z,w;r) = L_0(z,w;r) = \sum_{k=0}^{\infty} K_{\Omega,p^k}(z,w) r^k \quad (z,w \in \Omega,\ r \in \mathbb{C}). \tag{7}$$

La fonction $\mathcal{L}_0(z,r) = L_0(z,z;r)$, définie par

$$\mathcal{L}_{\Omega,p}(z,r) = \mathcal{L}_0(z,r) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathcal{K}_{\Omega,p^k}(z) r^k \quad (z \in \Omega,\ r \geq 0) \tag{8}$$

est également appelée noyau de Bergman virtuel de (Ω,p).

3.2. Noyau de Bergman de domaines de Hartogs

Soit $\Omega \subset V$ et $p : \Omega \to]0,+\infty[$ une fonction continue positive sur Ω. On considère le domaine de Hartogs $\widehat{\Omega}_m(p)$ au-dessus de Ω, défini par

$$\widehat{\Omega}_m(p) = \left\{ (z,Z) \in \Omega \times \mathbb{C}^m \mid \|Z\|^2 < p(z) \right\}.$$

On munit ici $\mathbb{C}^m$ de la structure hermitienne standard et de la forme volume associée

$$\omega_m(Z) = \left(\tfrac{\mathrm{i}}{2\pi} \partial\overline{\partial} \|Z\|^2 \right)^m.$$

Le domaine $\widehat{\Omega}_m(p)$ sera muni de la forme volume

$$\omega_V(z) \wedge \omega_m(Z).$$

Le théorème suivant montre comment calculer le noyau de Bergman des domaines de Hartogs $\widehat{\Omega}_m(p)$ ($m > 0$) à partir du noyau de Bergman virtuel de (Ω,p).

THÉORÈME 1. *Le noyau de Bergman $\widehat{K}_m$ (resp. $\widehat{\mathcal{K}}_m$) de $\widehat{\Omega}_m(p)$ est égal à*

$$\widehat{K}_m((z,Z),(w,W)) = L_m(z,w;\langle Z,W\rangle)\,, \tag{9}$$

$$\widehat{\mathcal{K}}_m(z,Z) = \mathcal{L}_m\left(z,\|Z\|^2\right), \tag{10}$$

où

$$L_m(z,w;r) = \tfrac{1}{m!}\tfrac{\partial^m}{\partial r^m} L_0(z,w;r), \tag{11}$$

$$\mathcal{L}_m(z,r) = \tfrac{1}{m!}\tfrac{\partial^m}{\partial r^m}\mathcal{L}_0(z,r). \tag{12}$$

3.3. Noyau de Bergman des domaines de Cartan-Hartogs

Soit Ω un domaine homogène borné cerclé irréductible, $N(z,t)$ sa norme générique, χ son polynôme de Hua. Soit

$$\chi(k\mu) = \sum_{j=0}^{d} c_j(\mu)\,\frac{(k+1)_j}{j!} = \textstyle\sum_{j=0}^{d} \mu^j C_{d-j}(\mu)\,(k+1)_j \tag{13}$$

la décomposition de $\chi(k\mu)$ suivant les factorielles croissantes de k.

On considère le *domaine de Cartan-Hartogs* $\widehat{\Omega}_m(\mu)$ construit au-dessus de Ω :

$$\widehat{\Omega}_m(\mu) = \left\{ (z,Z) \in \Omega\times\mathbb{C}^m, \quad \|Z\|^2 < N(z,z)^{\mu} \right\}. \tag{14}$$

On note $\widehat{K}_{m,\mu}((z,Z),(w,W))$ le noyau de Bergman de $\widehat{\Omega}_m(\mu)$ et

$$\widehat{\mathcal{K}}_{m,\mu}(z,Z) = \widehat{K}_{m,\mu}((z,Z),(z,Z)).$$

On note $L_{m,\mu}(z,w;r)$ le noyau de Bergman virtuel de $(\Omega, N(z,z)^{\mu})$ et

$$\mathcal{L}_{m,\mu}(z,r) = L_{m,\mu}(z,w;r).$$

THÉORÈME 2. *Soit Ω un domaine homogène borné cerclé irréductible. On a*

$$L_{0,\mu}(z,w,r) = \frac{C_\Omega}{N(z,w)^g}\sum_{j=0}^{d} c_j(\mu)\,\frac{1}{(1-\xi)^{j+1}}, \tag{15}$$

$$\mathcal{L}_{0,\mu}(z,r) = \frac{C_\Omega}{N(z,z)^g}\sum_{j=0}^{d} c_j(\mu)\,\frac{1}{(1-X)^{j+1}}, \tag{16}$$

où ξ et X sont les fonctions définies par

$$\xi(z,w,r) = \frac{r}{N(z,w)^{\mu}}, \qquad X(z,r) = \frac{r}{N(z,z)^{\mu}}$$

et $C_\Omega = \frac{1}{\chi(0)\,\mathrm{vol}\,\Omega}$.

Démonstration. D'après le lemme 1 et (13), on a

$$L_0\,(z,w;r) = \sum_{k=0}^{\infty} K_{\Omega,p^k}(z,w) r^k = C_\Omega \sum_{k=0}^{\infty} N(z,w)^{-g-k\mu} \chi(k\mu) r^k$$
$$= \frac{C_\Omega}{N(z,z)^g} \sum_{k=0}^{\infty} \chi(k\mu)\xi^k$$

où $\xi = \frac{r}{N(z,w)^\mu}$. Si P est un polynôme décomposé sous la forme

$$P(k) = \sum_{j=0}^{d} c_j \frac{(k+1)_j}{j!},$$

on a, pour $|\xi| < 1$,

$$\sum_{k=0}^{\infty} P(k)\xi^k = \sum_{j=0}^{d} c_j \frac{1}{(1-\xi)^{j+1}},$$

d'où le résultat pour $P(k) = \chi(k\mu)$ et $\chi\,(k\mu) = \sum_{j=0}^{d} c_j\,(\mu)\,\frac{(k+1)_j}{j!}$. □

NOTATIONS. On note $F_\mu = F_\mu^0$ la fonction rationnelle

(17) $$F_\mu^0(\xi) = \sum_{j=0}^{d} c_j\,(\mu)\,\frac{1}{(1-\xi)^{j+1}}$$

et $P_\mu = P_\mu^0$ le polynôme

(18) $$P_\mu^0(\eta) = \sum_{j=0}^{d} c_j\,(\mu)\,\eta^j.$$

Plus généralement, pour m entier positif, on note F_μ^m la fraction rationnelle

(19) $$F_\mu^m(\xi) = \sum_{j=0}^{d} \frac{(j+m)!}{j!} c_j\,(\mu)\,\frac{1}{(1-\xi)^{j+m+1}}$$

et P_μ^m le polynôme

(20) $$P_\mu^m(\eta) = \frac{1}{m!} \sum_{j=0}^{d} \frac{(j+m)!}{j!} c_j\,(\mu)\,\eta^j.$$

THÉORÈME 3. *Le noyau de Bergman du domaine*

$$\widehat{\Omega}_m\,(\mu) = \left\{(z,Z) \in \Omega \times \mathbb{C}^m, \quad \|Z\|^2 < N\,(z,z)^\mu\right\}$$

est

(21) $$\widehat{K}_{m,\mu}\,((z,Z),(w,W)) = \frac{1}{m!} \frac{C}{N\,(z,w)^{g+m\mu}} F_\mu^m(\xi),$$

où $\xi : \widehat{\Omega}_m(\mu) \times \widehat{\Omega}_m(\mu) \to \mathbb{C}$ *est définie par*

$$\xi((z,Z),(w,W)) = \frac{\langle Z,W\rangle}{N(z,w)^{\mu}}. \tag{22}$$

Démonstration. On a

$$\begin{aligned} L_{0,\mu}(z,w,r) &= \frac{C}{N(z,w)^{g}} \sum_{j=0}^{d} c_j(\mu) \frac{1}{(1-\xi)^{j+1}}, \\ \xi(z,w,r) &= \frac{r}{N(z,w)^{\mu}} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} L_{m,\mu}(z,w,r) &= \frac{1}{m!}\frac{\partial^m}{\partial r^m} L_{0,\mu}(z,w,r) \\ &= \frac{1}{m!}\frac{C}{N(z,w)^{g+m\mu}} \sum_{j=0}^{d} \frac{(j+m)!}{j!} c_j(\mu) \frac{1}{(1-\xi)^{j+m+1}}. \end{aligned}$$

On en déduit le noyau de Bergman de $\widehat{\Omega}_m(\mu)$:

$$\widehat{K}_{m,\mu}((z,Z),(w,W)) = L_{m,\mu}(z,w;\langle Z,W\rangle) = \frac{1}{m!}\frac{C}{N(z,w)^{g+m\mu}} F_{\mu}^{m}(\xi).$$

□

Soit $\eta : \widehat{\Omega}_m(\mu) \times \widehat{\Omega}_m(\mu) \to \mathbb{C}$ définie par

$$\eta((z,Z),(w,W)) = \frac{1}{1-\xi((z,Z),(w,W))} = \frac{N(z,w)^{\mu} - \langle Z,W\rangle}{N(z,w)^{\mu}}. \tag{23}$$

Le noyau de Bergman de $\widehat{\Omega}_m(\mu)$ s'écrit encore

$$\widehat{K}_{m,\mu}((z,Z),(w,W)) = \frac{C}{N(z,w)^{g+m\mu}} \eta^{m+1} P_{\mu}^{m}(\eta). \tag{24}$$

DÉFINITION 2. *Le polynôme*

$$P_{\mu}^{m}(\eta) = \frac{1}{m!} \sum_{j=0}^{d} \frac{(j+m)!}{j!} c_j(\mu) \eta^j = \sum_{j=0}^{d} (m+1)_j C_{d-j}(\mu) \mu^j \eta^j$$

sera appelé polynôme représentatif du noyau de Bergman de $\widehat{\Omega}_m(\mu)$.

4. Problème de Lu Qikeng pour les domaines de Cartan-Hartogs

Le *problème de Lu Qikeng* pour un ouvert U de $\mathbb{C}^n$ consiste à déterminer si le noyau de Bergman $K_U(z,w)$ de ce domaine peut avoir des zéros. Un domaine U est appelé *domaine de Lu Qikeng* si son noyau de Bergman ne s'annule pas dans $U \times U$.

Soit Ω un domaine homogène borné cerclé irréductible, $N(z,t)$ sa norme générique, χ son polynôme de Hua. Pour $\mu > 0$ et m entier positif, on considère le *domaine de Cartan-Hartogs* $\widehat{\Omega}_m(\mu)$ construit au-dessus de Ω :

$$\widehat{\Omega}_m(\mu) = \left\{(z,Z) \in \Omega \times \mathbb{C}^m, \quad \|Z\|^2 < N(z,z)^\mu\right\}.$$

Le noyau de Bergman de $\widehat{\Omega}_m(\mu)$ s'écrit

$$\widehat{K}_{m,\mu}((z,Z),(w,W)) = \frac{C}{N(z,w)^{g+m\mu}} \eta^{m+1} P_\mu^m(\eta), \tag{25}$$

où le polynôme P_μ^m est le *polynôme représentatif du noyau de Bergman*, défini à partir du polynôme de Hua χ par les relations

$$\chi(k\mu) = \sum_{j=0}^{d} \mu^j C_{d-j}(\mu)(k+1)_j, \tag{26}$$

$$P_\mu^m(\eta) = \sum_{j=0}^{d} (m+1)_j \mu^j C_{d-j}(\mu)\eta^j, \tag{27}$$

et la fonction η est définie par

$$\xi((z,Z),(w,W)) = \frac{\langle Z,W\rangle}{N(z,w)^\mu}, \tag{28}$$

$$\eta((z,Z),(w,W)) = \frac{1}{1-\xi((z,Z),(w,W))}. \tag{29}$$

LEMME 2. *Soient ξ et η les fonctions définies sur $\widehat{\Omega}_m(\mu) \times \widehat{\Omega}_m(\mu)$ par (28) et (29). Alors l'image de ξ est le disque unité Δ de $\mathbb{C}$ et l'image de η est le demi-plan $\left\{\operatorname{Re}\eta > \frac{1}{2}\right\}$.*

Démonstration. Le noyau de Bergman de Ω est

$$K(z,t) = C_0 N(z,t)^{-g},$$

avec $C_0 = (\operatorname{vol}\Omega)^{-1}$. De la propriété connue du noyau de Bergman :

$$|K(z,t)|^2 \leq K(z,z)K(t,t), \tag{30}$$

on déduit

$$|N(z,t)|^2 \geq N(z,z)N(t,t) \qquad (z,t \in \Omega). \tag{31}$$

Dans $\widehat{\Omega}_m(\mu)\times\widehat{\Omega}_m(\mu)$, on a donc

$$|\xi((z,Z),(t,T))|^2=\frac{|\langle Z,T\rangle|^2}{N(z,t)^{2\mu}}\leq\frac{\|Z\|^2}{N(z,z)^{\mu}}\frac{\|T\|^2}{N(t,t)^{\mu}}<1.$$

La fonction ξ prend donc ses valeurs dans le disque unité Δ de $\mathbb{C}$. Comme

$$\xi\left((0,Z),(0,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}Z)\right)=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\|Z\|^2,$$

l'image de ξ est égale à Δ. $\square$

L'expression (25) du noyau de Bergman de $\widehat{\Omega}_m(\mu)$ entraîne alors immédiatement

THÉORÈME 4. *Le domaine $\widehat{\Omega}_m(\mu)$ est un domaine de Lu Qikeng si et seulement si le polynôme P_μ^m ne s'annule pas dans $\left\{\mathrm{Re}\,\eta>\frac{1}{2}\right\}$.*

Le problème de Lu Qikeng pour les domaines $\widehat{\Omega}_m(\mu)$ est ainsi ramené à la localisation des racines du polynôme P_μ^m, qui a le même degré que le polynôme de Hua χ et s'en déduit algébriquement.

5. Solution du problème de Lu Qikeng pour une base de faible dimension

Dans cette section, nous donnons la solution complète du problème de Lu Qikeng pour les domaines de Cartan-Hartogs $\widehat{\Omega}_m(\mu)$, lorsque la base Ω est un domaine borné symétrique irréductible de dimension au plus 4.

5.1. Cas où Ω est le disque unité de $\mathbb{C}$

Le domaine Ω est le disque unité de $\mathbb{C}$ et le domaine $\widehat{\Omega}_m(\mu)$ est

$$\begin{aligned}\widehat{\Omega}_m(\mu)&=\left\{(z,Z)\in\Omega\times\mathbb{C}^m,\quad \|Z\|^2<\left(1-|z|^2\right)^{\mu}\right\}\\&=\left\{(z,Z)\in\mathbb{C}\times\mathbb{C}^m,\quad |z|^2+\|Z\|^{2/\mu}<1\right\}.\end{aligned}$$

On a (voir l'annexe 7.1)

$$P_\mu^m\left(\tfrac{1}{2}\right)=\tfrac{(m-1)\mu}{2}+1,$$

qui est positif pour tout $\mu>0$ et tout $m\geq1$. La racine de P_μ^m est donc toujours inférieure à $\frac{1}{2}$; d'où

THÉORÈME 5. *Si Ω est le disque unité de $\mathbb{C}$, le domaine $\widehat{\Omega}_m(\mu)$ est un domaine de Lu Qikeng pour tout $\mu>0$ et tout entier $m\geq1$.*

Ce résultat facile et connu (voir par exemple [7]) n'est cité ici que pour comparaison avec les résultats qui suivront et parce qu'il illustre la méthode employée lorsque Ω est de dimension >1.

5.2. Cas où Ω est de type $I_{1,2}$

Le domaine Ω est la boule unité de $\mathbb{C}^2$ et le domaine $\widehat{\Omega}_m(\mu)$ est

$$\begin{aligned}\widehat{\Omega}_m(\mu) &= \left\{(z,Z) \in \Omega \times \mathbb{C}^m, \quad \|Z\|^2 < \left(1-\|z\|^2\right)^{\mu}\right\}\\ &= \left\{(z,Z) \in \mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}^m, \quad \|z\|^2 + \|Z\|^{2/\mu} < 1\right\}.\end{aligned}$$

Le polynôme de Hua est

$$\chi(s) = (s+1)(s+2).$$

Le polynôme représentatif du noyau de Bergman de $\widehat{\Omega}_m(\mu)$ est (voir annexe 7.2)

$$P^m_\mu(\eta) = (1-\mu)(2-\mu) + 3(m+1)\mu(1-\mu)\eta + (m+1)(m+2)\mu^2\eta^2.$$

D'après le théorème 4, le domaine $\widehat{\Omega}_m(\mu)$ est un domaine de Lu Qikeng si et seulement si le polynôme $P^m_\mu(\eta)$ a toutes ses racines dans le demi plan $\left\{\operatorname{Re}(z) \le \frac{1}{2}\right\}$. D'après la proposition 1, ces racines sont situees dans le demi plan $\left\{\operatorname{Re}(z) < \frac{1}{2}\right\}$ si et seulement si

$$P^m_\mu\left(\tfrac{1}{2}\right) > 0, \tag{32}$$

$$\frac{\mathrm{d}P^m_\mu}{\mathrm{d}\eta}\left(\tfrac{1}{2}\right) > 0. \tag{33}$$

On a (annexe 7.2)

$$\frac{1}{(m+1)\mu}\frac{\mathrm{d}P^m_\mu}{\mathrm{d}\eta}\left(\tfrac{1}{2}\right) = 3 + (m-1)\mu;$$

la condition (33) est donc vérifiée pour tout $\mu > 0$ et tout $m \ge 1$.

On a d'autre part (annexe 7.2)

$$P^m_\mu\left(\tfrac{1}{2}\right) = \frac{m(m-3)}{4}\mu^2 + \frac{3(m-1)}{2}\mu + 2.$$

Si $m \ge 3$, tous les coefficients de ce polynôme en μ sont non négatifs et on a $P^m_\mu\left(\frac{1}{2}\right) > 0$ pour tout $\mu > 0$.

Si $m = 1$, on a

$$P^1_\mu\left(\tfrac{1}{2}\right) = 2 - \frac{\mu^2}{2},$$

qui est strictement positif si et seulement si $\mu < \mu_1 = 2$.

Si $m = 2$, on a

$$P^2_\mu\left(\tfrac{1}{2}\right) = 2 + \tfrac{3}{2}\mu - \tfrac{1}{2}\mu^2,$$

qui est strictement positif si et seulement si $\mu < \mu_2 = 4$. Les conditions (33) et (32) sont donc vérifiées pour $\mu < \mu_m$, μ_m étant la racine positive de $P^m_\mu\left(\frac{1}{2}\right)$. Comme l'ensemble des racines varie continûment en fonction de μ, le domaine est de Lu Qikeng si et seulement si $\mu \le \mu_m$. En conclusion :

THÉORÈME 6. *Soit Ω la boule unité de $\mathbb{C}^2$. Le domaine $\widehat{\Omega}_m(\mu)$ est un domaine de Lu Qikeng*

- *pour* $m = 1$, *si et seulement si* $\mu \leq 2$ *;*
- *pour* $m = 2$, *si et seulement si* $\mu \leq 4$ *;*
- *pour* $m \geq 3$, *quel que soit* $\mu > 0$.

Si $m = 1$, ce résultat est dû à H.P. Boas, Siqi Fu, E. Straube ([4]) ; voir aussi [7]. Pour $m > 1$, les résultats du théorème sont nouveaux.

5.3. Cas où Ω est de type $I_{1,3}$

Le domaine Ω est la boule hermitienne de dimension 3. Le polynôme de Hua est

$$\chi(s) = (s+1)(s+2)(s+3).$$

Le polynôme représentatif du noyau de Bergman de $\widehat{\Omega}_m(\mu)$ est (voir annexe 7.3)

$$\begin{aligned} P_\mu^m(\eta) &= (1-\mu)(2-\mu)(3-\mu) + (m+1)\mu(1-\mu)(11-7\mu)\eta \\ &\quad + 6(m+1)(m+2)(1-\mu)\mu^2\eta^2 + (m+1)(m+2)(m+3)\mu^3\eta^3. \end{aligned}$$

On a

$$P_\mu^m\left(\tfrac{1}{2}\right) = 6 + \tfrac{11(m-1)}{2}\mu + \tfrac{3m(m-3)}{2}\mu^2 + \tfrac{(m-1)\left(m^2-5m-2\right)}{8}\mu^3.$$

Pour $1 \leq m \leq 5$, soit μ_m l'unique racine positive du polynôme q_m défini par $q_m(\mu) = P_\mu^m\left(\frac{1}{2}\right)$. On a (cf. proposition 7)

$$0 < \mu_1 = \sqrt{2} < \mu_2 < \mu_3 < \mu_4 < \mu_5.$$

Du théorème 11, on déduit la solution complète du problème de Lu Qikeng lorsque Ω est de type $I_{1,3}$:

THÉORÈME 7. *Soit* Ω *une boule hermitienne de dimension* 3. *Si* $m \geq 6$, *le domaine de Cartan-Hartogs* $\widehat{\Omega}_m(\mu)$ *est un domaine de Lu Qikeng pour tout* $\mu \in]0, +\infty[$. *Si* $1 \leq m \leq 5$, *le domaine de Cartan-Hartogs* $\widehat{\Omega}_m(\mu)$ *est un domaine de Lu Qikeng si et seulement si* $0 < \mu \leq \mu_m$.

Pour $m = 1$, ce résultat a été obtenu par Weiping Yin ([7]) par une méthode différente mais essentiellement équivalente. Les résultats du théorème sont nouveaux pour $m > 1$.

5.4. Cas où Ω est de type IV_3

Le domaine Ω est la boule de Lie de dimension 3 (isomorphe au domaine symétrique associé à l'espace $\mathcal{S}_2(\mathbb{C})$ des matrices symétriques $(2,2)$). Les invariants numériques sont $a = 1$, $b = 0$, $r = 2$. Le polynôme de Hua est

$$\chi(s) = (s+1)\left(s+\tfrac{3}{2}\right)(s+2).$$

Le polynôme représentatif du noyau de Bergman de $\widehat{\Omega}_m(\mu)$ est (voir annexe 7.4)

$$\begin{aligned}P_\mu^m(\eta) &= (1-\mu)(2-\mu)\left(\tfrac{3}{2}-\mu\right) + (m+1)\mu(1-\mu)\left(\tfrac{13}{2}-7\mu\right)\eta \\ &\quad + 3(m+1)(m+2)\left(\tfrac{3}{2}-2\mu\right)\mu^2\eta^2 + (m+1)(m+2)(m+3)\mu^3\eta^3.\end{aligned}$$

On a

$$P_\mu^m\left(\tfrac{1}{2}\right) = \tfrac{(m-1)\left(m^2-5m-2\right)}{8}\mu^3 + \tfrac{9m(m-3)}{8}\mu^2 + \tfrac{13(m-1)}{4}\mu + 3.$$

Pour $1 \leq m \leq 5$, soient q_m les polynômes définis par

$$q_m(\mu) = P_\mu^m\left(\tfrac{1}{2}\right)$$

et soit μ_m l'unique racine positive du polynôme q_m. On a (cf. proposition 11)

$$0 < \mu_1 = \tfrac{2}{\sqrt{3}} < \mu_2 < \mu_3 < \mu_4 < \mu_5.$$

Du théorème 12, on déduit la solution complète du problème de Lu Qikeng lorsque Ω est de type IV_3 :

THÉORÈME 8. *Soit* Ω *une boule de Lie de dimension* 3*. Si* $m \geq 6$*, le domaine de Cartan-Hartogs* $\widehat{\Omega}_m(\mu)$ *est un domaine de Lu Qikeng pour tout* $\mu \in]0,+\infty[$*. Si* $1 \leq m \leq 5$*, le domaine de Cartan-Hartogs* $\widehat{\Omega}_m(\mu)$ *est un domaine de Lu Qikeng si et seulement si* $0 < \mu \leq \mu_m$*.*

Les résultats de ce théorème sont entièrement nouveaux.

5.5. Cas où Ω est de type $I_{1,4}$

Le domaine Ω est la boule hermitienne de dimension 4. Le polynôme de Hua est

$$\chi(s) = (s+1)(s+2)(s+3)(s+4).$$

Le polynôme représentatif du noyau de Bergman de $\widehat{\Omega}_m(\mu)$ est (voir annexe 7.5)

$$\begin{aligned}P_\mu^m(\eta) &= (1-\mu)(2-\mu)(3-\mu)(4-\mu) \\ &\quad + 5(m+1)(1-\mu)(5-3\mu)(2-\mu)\mu\eta \\ &\quad + 5(m+1)_2(1-\mu)(7-5\mu)\mu^2\eta^2 \\ &\quad + 10(m+1)_3(1-\mu)\mu^3\eta^3 + (m+1)_4\mu^4\eta^4\end{aligned}$$

On a

$$\begin{aligned}P_\mu^m\left(\tfrac{1}{2}\right) &= (4+m\mu)\left[6 + \tfrac{1}{4}(19m-25)\mu + m(m-5)\mu^2\right. \\ &\quad \left. + \tfrac{1}{16}(m^3-10m^2+15m+10)\mu^3\right].\end{aligned}$$

Pour $1 \leq m \leq 7$, soit μ_m la plus petite racine positive du polynôme q_m défini par $q_m(\mu) = P_\mu^m\left(\frac{1}{2}\right)$. On a (cf. proposition 15)

$$0 < \mu_1 = \sqrt{\frac{3}{2}} < \mu_2 < \mu_3 < \mu_4 < \mu_5 < \mu_6 < \mu_7.$$

Du théorème (13), on déduit la solution complète du problème de Lu Qikeng lorsque Ω est de type $I_{1,4}$:

THÉORÈME 9. *Soit Ω une boule hermitienne de dimension 4. Si $m \geq 8$, le domaine de Cartan-Hartogs $\widehat{\Omega}_m(\mu)$est un domaine de Lu Qikeng pour tout $\mu \in]0,+\infty[$. Si $1 \leq m \leq 7$, le domaine $\widehat{\Omega}_m(\mu)$ est un domaine de Lu Qikeng si et seulement si $0 < \mu \leq \mu_m$.*

Pour $m = 1$, ce résultat a été obtenu par Liyou Zhang et Jong-do Park (2006, non publié). Les résultats du théorème sont nouveaux pour $m > 1$.

5.6. Cas où Ω est de type IV_4

Le domaine Ω est la boule de Lie de dimension 4. Le polynôme de Hua est

$$\chi(s) = (s+1)(s+2)^2(s+3).$$

Le polynôme représentatif du noyau de Bergman de $\widehat{\Omega}_m(\mu)$ est (voir annexe 7.6)

$$\begin{aligned} P_\mu^m(\eta) = {}& (1-\mu)(2-\mu)^2(3-\mu) + (m+1)(1-\mu)(7-5\mu)(4-3\mu)\mu\eta \\ & + (m+1)_2(1-\mu)(23-25\mu)\mu^2\eta^2 + 2(m+1)_3(4-5\mu)\mu^3\eta^3 \\ & + (m+1)_4\mu^4\eta^4. \end{aligned}$$

On a

$$\begin{aligned} P_\mu^m\left(\tfrac{1}{2}\right) = {}& 12 + 14(m-1)\mu + \tfrac{23m(m-3)}{4}\mu^2 \\ & + (m-1)(m^2-5m-2)\mu^3 + \tfrac{m^3-10m^2+15m+10}{16}\mu^4. \end{aligned}$$

Pour $1 \leq m \leq 7$, soit μ_m la plus petite racine positive du polynôme q_m défini par $q_m(\mu) = P_\mu^m\left(\frac{1}{2}\right)$ On a (cf. proposition 20)

$$0 < \mu_1 = \tfrac{1}{2}\sqrt{23-\sqrt{337}} < \mu_2 < \mu_3 < \mu_4 < \mu_5 < \mu_6 < \mu_7.$$

Du théorème (14), on déduit la solution complète du problème de Lu Qikeng lorsque Ω est de type IV_4. Les résultats de ce théorème sont entièrement nouveaux.

THÉORÈME 10. *Soit Ω une boule de Lie de dimension 4. Si $m \geq 8$, le domaine de Cartan-Hartogs $\widehat{\Omega}_m(\mu)$ est un domaine de Lu Qikeng pour tout $\mu \in]0,+\infty[$. Si $1 \leq m \leq 7$, le domaine $\widehat{\Omega}_m(\mu)$ est un domaine de Lu Qikeng si et seulement si $0 < \mu \leq \mu_m$.*

Annexes

6. Localisation des racines

Le problème de Lu Qikeng pour les domaines de Cartan-Hartogs $\widehat{\Omega}_m(\mu)$ a été ramené à la localisation des racines du polynôme P^m_μ par rapport au demi-plan $\left\{\operatorname{Re} z > \frac{1}{2}\right\}$ (théorème 4). Nous rappelons ci-dessous le *critère de Routh–Hurwitz* qui permet de déterminer quand un polynôme à coefficients réels a toutes ses racines dans le demi-plan $\{\operatorname{Re} z < 0\}$. Dans les paragraphes suivants, nous en déduisons les critères utilisés pour résoudre le problème de Lu Qikeng pour un domaine de Cartan–Hartogs dont la base Ω est de dimension au plus 4.

6.1. Critère de Routh–Hurwitz

Soit P un polynôme à coefficients réels de degré n

$$P(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots + a_{n-1} z + a_n; \tag{34}$$

on suppose $a_0 > 0$. Le polynôme P est dit *stable* si toutes ses racines ont des parties réelles négatives.

L'étude de la stabilité des polynômes intervient dans la théorie du contrôle. En effet, l'équation caractéristique d'un système d'équations différentielles linéaires est un polynôme et la stabilité du système se traduit par le fait que toutes les racines de l'équation caractéristique soient dans le demi-plan négatif.

En 1875, le mécanicien anglais Routh a élaboré un algorithme qui permet de déterminer si un polynôme est stable (et plus généralement de localiser ses racines par rapport à $\{\operatorname{Re} z = 0\}$). Vingt ans plus tard, le mathématicien allemand Hurwitz a donné un critère équivalent, dans une forme différente, utilisant les déterminants (*déterminants de Hurwitz*)

$$\Delta_1 = a_1, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ a_0 & a_2 \end{vmatrix}, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 \\ a_0 & a_2 & a_4 \\ 0 & a_1 & a_3 \end{vmatrix},$$

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & \cdots & 0 \\ a_0 & a_2 & a_4 & \cdots & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & a_0 & a_2 & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_n \end{vmatrix}.$$

CRITÈRE (Critère de Routh–Hurwitz). Le polynôme (34) est stable si et seulement si les n déterminants de Hurwitz sont positifs.

En 1914, les mathématiciens français Liénard et Chipart ont établi un critère de stabilité, différent de celui de Routh-Hurwitz, en constatant que lorsque les coefficients a_0, a_1 , $\cdots$, a_n sont positifs, les conditions sur la positivité des Δ_i ne sont pas indépendantes. Par exemple, pour $n = 4$, les conditions de stabilité se réduisent à $a_1 > 0$, $a_2 > 0$, $a_4 > 0$ et $\Delta_3 > 0$.

6.2. Polynômes de degré 2

Soit

$$Q(z) = a_0 z^2 + a_1 z + a_2,$$

avec $a_0 > 0$. Les déterminants de Hurwitz sont

$$\Delta_1 = a_1, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & 0 \\ a_0 & a_2 \end{vmatrix} = a_1 a_2.$$

Le polynôme Q est stable si et seulement si on a

$$a_1 > 0, \quad a_2 > 0. \tag{35}$$

PROPOSITION 1. *Le polynôme du second degré P a ses racines dans $\left\{\mathrm{Re}\, z < \frac{1}{2}\right\}$ si et seulement si le polynôme $Q(z) = P\left(\frac{1}{2} + z\right)$ est stable, c'est-à-dire si*

$$P\left(\tfrac{1}{2}\right) > 0, \quad P'\left(\tfrac{1}{2}\right) > 0. \tag{36}$$

Il est également facile d'établir cette proposition directement, sans recours au critère de Routh–Hurwitz.

6.3. Polynômes de degré 3

Soit

$$Q(z) = a_0 z^3 + a_1 z^2 + a_2 z + a_3,$$

avec $a_0 > 0$. Les déterminants de Hurwitz sont

$$\Delta_1 = a_1, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ a_0 & a_2 \end{vmatrix}, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & 0 \\ a_0 & a_2 & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 \end{vmatrix} = a_3 \Delta_2.$$

Le polynôme Q est stable si et seulement si on a

$$a_1 > 0, \quad \Delta_2 > 0, \quad a_3 > 0.$$

Comme $\Delta_2 = a_1 a_2 - a_0 a_3$, cette condition équivaut à

$$a_3 > 0, \quad a_2 > 0, \quad \Delta_2 > 0. \tag{37}$$

Soit $P(z) = \alpha + \beta z + \gamma z^2 + \delta z^3$ un polynôme de degré 3 à coefficients réels avec $\delta > 0$. Ce polynôme a ses racines dans $\left\{\operatorname{Re} z < \frac{1}{2}\right\}$ si et seulement si le polynôme $Q(z) = P\left(\frac{1}{2} + z\right)$ est stable. On a

$$Q(z) = a_0 z^3 + a_1 z^2 + a_2 z + a_3,$$

avec $a_3 = P\left(\frac{1}{2}\right)$, $a_2 = P'\left(\frac{1}{2}\right)$ et

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} \beta + \gamma + \frac{3}{4}\delta & \delta \\ \alpha + \frac{\beta}{2} + \frac{\gamma}{4} + \frac{\delta}{8} & \gamma + \frac{3}{2}\delta \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \beta + \gamma + \frac{3}{4}\delta & \delta \\ \alpha - \frac{\gamma}{4} - \frac{\delta}{4} & \gamma + \delta \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \beta + \gamma + \delta & \delta \\ \alpha & \gamma + \delta \end{vmatrix}.$$

On en déduit

PROPOSITION 2. *Soit $P(z) = \alpha + \beta z + \gamma z^2 + \delta z^3$ un polynôme de degré 3 à coefficients réels avec $\delta > 0$. Ce polynôme a toutes ses racines dans $\left\{\operatorname{Re} z < \frac{1}{2}\right\}$ si et seulement si on a*

(38) $$P\left(\tfrac{1}{2}\right) > 0, \quad P'\left(\tfrac{1}{2}\right) > 0,$$

(39) $$\Delta_2 = (\gamma + \delta)(\beta + \gamma + \delta) - \alpha\delta > 0.$$

6.4. Polynômes de degré 4

Soit

$$Q(z) = a_0 z^4 + a_1 z^3 + a_2 z^2 + a_3 z + a_4$$

un polynôme à coefficients réels avec $a_0 > 0$. Les déterminants de Hurwitz sont

$$\Delta_1 = a_1, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ a_0 & a_2 \end{vmatrix}, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & 0 \\ a_0 & a_2 & a_4 \\ 0 & a_1 & a_3 \end{vmatrix},$$

$$\Delta_4 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & 0 & 0 \\ a_0 & a_2 & a_4 & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 & 0 \\ 0 & 0 & a_2 & a_4 \end{vmatrix} = a_4 \Delta_3.$$

Le polynôme Q est stable si et seulement tous les Δ_j sont positifs. Les conditions $\Delta_3 > 0$ et $\Delta_4 > 0$ sont équivalentes à

$$\Delta_3 > 0, \quad a_4 > 0. \tag{40}$$

D'autre part, on a

$$\Delta_3 = a_3\Delta_2 - a_1^2 a_4$$

et les conditions (40) et $a_3 > 0$ entraînent donc $\Delta_2 > 0$. Finalement, $\Delta_2 = a_1a_2 - a_0a_3$ et $a_2 > 0$ entraîne $a_1 > 0$ si les conditions précédentes sont réalisées. Le critère de Routh–Hurwitz est ainsi équivalent au critère de Liénard et Chipart, qui s'écrit ici

PROPOSITION 3. *Le polynôme à coefficients réels*

$$Q(z) = a_0z^4 + a_1z^3 + a_2z^2 + a_3z + a_4$$

($a_0 > 0$*) est stable si et seulement si on a*

$$a_2 > 0, \quad a_3 > 0, \quad a_4 > 0, \quad \Delta_3 > 0. \tag{41}$$

Soit

$$P(z) = \alpha + \beta z + \gamma z^2 + \delta z^3 + \varepsilon z^4$$

un polynôme de degré 4 à coefficients réels avec $\varepsilon > 0$. Soit

$$Q(z) = a_0z^4 + a_1z^3 + a_2z^2 + a_3z + a_4$$

le polynôme $Q(z) = P\left(\frac{1}{2} + z\right)$. On a

$$\begin{aligned}
a_4 &= P\left(\tfrac{1}{2}\right) = \alpha + \tfrac{1}{2}\beta + \tfrac{1}{4}\gamma + \tfrac{1}{8}\delta + \tfrac{1}{16}\varepsilon,\\
a_3 &= P'\left(\tfrac{1}{2}\right) = \beta + \gamma + \tfrac{3}{4}\delta + \tfrac{1}{2}\varepsilon,\\
a_2 &= \tfrac{1}{2}P''\left(\tfrac{1}{2}\right) = \gamma + \tfrac{3}{2}\delta + \tfrac{3}{2}\varepsilon,\\
a_1 &= \tfrac{1}{6}P'''\left(\tfrac{1}{2}\right) = \delta + 2\varepsilon,\\
a_0 &= \varepsilon.
\end{aligned}$$

Le polynôme de Hurwitz Δ_3 relatif à Q est

$$\begin{aligned}
\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & 0 \\ a_0 & a_2 & a_4 \\ 0 & a_1 & a_3 \end{vmatrix} &= a_1a_2a_3 - a_1^2a_4 - a_0a_3^2 \\
&= (\delta + 2\varepsilon)\left(\gamma + \tfrac{3}{2}\delta + \tfrac{3}{2}\varepsilon\right)\left(\beta + \gamma + \tfrac{3}{4}\delta + \tfrac{1}{2}\varepsilon\right) \\
&\quad - (\delta + 2\varepsilon)^2\left(\alpha + \tfrac{\beta}{2} + \tfrac{\gamma}{4} + \tfrac{\delta}{8} + \tfrac{\varepsilon}{16}\right) - \varepsilon\left(\beta + \gamma + \tfrac{3}{4}\delta + \tfrac{1}{2}\varepsilon\right)^2.
\end{aligned}$$

On a

$$\Delta_3 = (\varepsilon + \delta + \gamma + \beta)\left[(\varepsilon + \delta + \gamma)(\varepsilon + \delta) - \varepsilon\beta\right] - (2\varepsilon + \delta)^2\alpha. \tag{42}$$

On a finalement, en appliquant cette relation et la proposition 3 :

PROPOSITION 4. *Soit*

$$P(z) = \alpha + \beta z + \gamma z^2 + \delta z^3 + \varepsilon z^4$$

un polynôme de degré 4 *à coefficients réels avec* $\varepsilon > 0$. *Les racines du polynôme P sont toutes situées dans* $\left\{\operatorname{Re} z < \frac{1}{2}\right\}$ *si et seulement si P vérifie les conditions*

$$P\left(\tfrac{1}{2}\right) > 0, \quad P'\left(\tfrac{1}{2}\right) > 0, \quad P''\left(\tfrac{1}{2}\right) > 0, \tag{43}$$

$$\Delta_3 \equiv (\varepsilon+\delta+\gamma+\beta)\left[(\varepsilon+\delta+\gamma)(\varepsilon+\delta) - \varepsilon\beta\right] - (2\varepsilon+\delta)^2\alpha > 0. \tag{44}$$

7. Tables

On trouvera ci-dessous pour les types indiqués de domaines bornés symétriques :

- le polynôme de Hua

$$\chi(s) = \prod_{j=1}^{r} \left(s + 1 + (j-1)\tfrac{a}{2}\right)_{1+b+(r-j)a} \ ;$$

- les coefficients $C_j(\mu)$ de la décomposition

$$\chi(k\mu) = \sum_{j=0}^{d} \mu^j C_{d-j}(\mu)\,(k+1)_j \ ;$$

- le polynôme représentatif du noyau de Bergman de $\widehat{\Omega}_m(\mu)$

$$P_\mu^m(\eta) = \sum_{j=0}^{d} (m+1)_j C_{d-j}(\mu)\mu^j \eta^j \ ;$$

- ses polynômes dérivés $\frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}\eta^k} P_\mu^m(\eta)$ $(1 \leq k < d)$;
- leurs valeurs pour $\eta = \frac{1}{2}$;
- en dimension 3, le déterminant de Hurwitz

$$\Delta_2 = (\gamma+\delta)(\beta+\gamma+\delta) - \alpha\delta$$

  associé au polynôme $P_\mu^m\left(\frac{1}{2}+\eta\right) = \alpha + \beta\eta + \gamma\eta^2 + \delta\eta^3$;
- en dimension 4, le déterminant de Hurwitz

$$\Delta_3 \equiv (\varepsilon+\delta+\gamma+\beta)\left[(\varepsilon+\delta+\gamma)(\varepsilon+\delta) - \varepsilon\beta\right] - (2\varepsilon+\delta)^2\alpha$$

  associé au polynôme $P_\mu^m\left(\frac{1}{2}+\eta\right) = \alpha + \beta\eta + \gamma\eta^2 + \delta\eta^3 + \varepsilon\eta^4$;
- éventuellement, les valeurs ci-dessus pour des valeurs particulières de *m*.

7.1. Type $I_{1,1}$

Le domaine Ω est le disque unité de $\mathbb{C}$. On a

$$\begin{aligned}\chi(s) &= s+1,\\ C_1(\mu) &= 1-\mu, \quad C_0(\mu)=1,\\ P_\mu^m(\eta) &= 1-\mu+(m+1)\mu\eta,\\ P_\mu^m\left(\tfrac{1}{2}\right) &= 1+\tfrac{m-1}{2}\mu.\end{aligned}$$

7.2. Type $I_{1,2}$

Le domaine Ω est la boule unité de $\mathbb{C}^2$. On a

$$\begin{aligned}\chi(s) &= (s+1)(s+2),\\ C_0(\mu) &= 1, \quad C_1(\mu)=3(1-\mu), \quad C_2(\mu)=(1-\mu)(2-\mu),\\ P_\mu^m(\eta) &= (1-\mu)(2-\mu)+3(m+1)\mu(1-\mu)\eta+(m+1)_2\mu^2\eta^2.\end{aligned}$$

Signe de $P_\mu^m\left(\frac{1}{2}\right)$

On a

$$q_m(\mu) = P_\mu^m\left(\tfrac{1}{2}\right) = (2+m\mu)\left(1+\tfrac{m-3}{4}\mu\right).$$

PROPOSITION 5. *Pour $m \geq 3$, $P_\mu^m(\frac{1}{2})$ est positif pour tout $\mu > 0$. Pour $m \leq 2$, le polynôme q_m admet une seule racine positive μ_m ($\mu_1 = 2 < \mu_2 = 4$) et $P_\mu^m(\frac{1}{2})$ est positif ou nul si et seulement si $0 < \mu \leq \mu_m$.*

Signe de $\frac{\mathrm{d}P_\mu^m}{\mathrm{d}\eta}\left(\frac{1}{2}\right)$

$$\frac{1}{(m+1)\mu}\frac{\mathrm{d}P_\mu^m}{\mathrm{d}\eta}\left(\tfrac{1}{2}\right) = 3+(m-1)\mu.$$

PROPOSITION 6. *Pour tout $m \geq 1$ et pour tout $\mu > 0$, on a $\frac{\mathrm{d}P_\mu^m}{\mathrm{d}\eta}\left(\frac{1}{2}\right) > 0$.*

7.3. Type $I_{1,3}$

Le domaine Ω est la boule unité de $\mathbb{C}^3$. On a

$$\begin{aligned}\chi(s) &= (s+1)(s+2)(s+3),\\ C_0(\mu) &= 1, \quad C_1(\mu)=6(1-\mu),\\ C_2(\mu) &= (1-\mu)(11-7\mu), \quad C_3(\mu)=(1-\mu)(2-\mu)(3-\mu),\\ P_\mu^m(\eta) &= (1-\mu)(2-\mu)(3-\mu)+(m+1)(1-\mu)(11-7\mu)\mu\eta\\ &\quad +6(m+1)_2(1-\mu)\mu^2\eta^2+(m+1)_3\mu^3\eta^3.\end{aligned}$$

Signe de $P_\mu^m\left(\frac{1}{2}\right)$

On a

$$\begin{aligned} P_\mu^m\left(\tfrac{1}{2}\right) &= q_m(\mu) = [4+(m-1)\mu]\, r_m(\mu), \\ r_m(\mu) &= \tfrac{1}{8}\left(12+8(m-1)\mu+(m^2-5m-2)\mu^2\right). \end{aligned}$$

Cas particuliers $(1 \leq m \leq 5)$:

$$\begin{aligned} r_1(\mu) &= \tfrac{3}{4}\left(2-\mu^2\right), \\ r_2(\mu) &= \tfrac{1}{2}(3+2\mu-2\mu^2), \\ r_3(\mu) &= \tfrac{1}{2}(3+4\mu-2\mu^2), \\ r_4(\mu) &= \tfrac{3}{4}(2+4\mu-\mu^2), \\ r_5(\mu) &= \tfrac{1}{4}\left(6+16\mu-\mu^2\right). \end{aligned}$$

Racines positives de q_m :

$$\mu_1 = \sqrt{2} < \mu_2 = \tfrac{1+\sqrt{7}}{2} < \mu_3 = 1+\sqrt{\tfrac{5}{2}} < \mu_4 = 2+\sqrt{6} < \mu_5 = 8+\sqrt{70}.$$

PROPOSITION 7. *Pour $m \geq 6$, $P_\mu^m(\frac{1}{2})$ est positif pour tout $\mu > 0$. Pour $m \leq 5$, le polynôme q_m admet une seule racine positive μ_m et $P_\mu^m(\frac{1}{2})$ est positif ou nul si et seulement si $0 < \mu \leq \mu_m$.*

Signe de $\frac{\mathrm{d}P_\mu^m}{\mathrm{d}\eta}\left(\frac{1}{2}\right)$

On a

$$q_m^1(\mu) = \frac{1}{(m+1)\mu}\frac{\mathrm{d}P_\mu^m}{\mathrm{d}\eta}\left(\tfrac{1}{2}\right) = 11+6\,(m-1)\,\mu+\tfrac{1}{4}\left(3m^2-9m-2\right)\mu^2.$$

Cas particuliers $(1 \leq m \leq 3)$:

$$\begin{aligned} q_1^1(\mu) &= 11-2\mu^2, \\ q_2^1(\mu) &= 11+6\mu-2\mu^2, \\ q_3^1(\mu) &= 11+12\mu-\tfrac{1}{2}\mu^2. \end{aligned}$$

Racines positives de q_m^1 $(1 \leq m \leq 3)$:

$$\begin{aligned} &0 < \mu_1^1 = \sqrt{\tfrac{11}{2}} < \mu_2^1 = \tfrac{3+\sqrt{31}}{2} < \mu_3^1 = 12+\sqrt{166}, \\ &0 < \mu_m < \mu_m^1 \qquad (1 \leq m \leq 3). \end{aligned}$$

PROPOSITION 8. *Pour $m \geq 4$, on a $\frac{\mathrm{d}P_\mu^m}{\mathrm{d}\eta}\left(\frac{1}{2}\right) > 0$ pour tout $\mu > 0$. Pour $m \leq 3$, le polynôme q_m^1 possède une seule racine positive μ_m^1 et est positif sur $\left[0, \mu_m^1\right]$.*

Signe de $\frac{\mathrm{d}^2 P_\mu^m}{\mathrm{d}\eta^2}\left(\frac{1}{2}\right)$

$$\frac{1}{(m+1)_2\mu^2}\frac{\mathrm{d}^2 P_\mu^m}{\mathrm{d}\eta^2}\left(\tfrac{1}{2}\right) = 3\,(4+(m-1)\mu)\,.$$

PROPOSITION 9. *On a*

$$\frac{\mathrm{d}^2 P_\mu^m}{\mathrm{d}\eta^2}\left(\tfrac{1}{2}\right) > 0$$

pour tout $\mu > 0$ et tout $m \geq 1$.

Déterminant de Hurwitz Δ_2

Soient $P_\mu^m(\eta) = \alpha+\beta\eta+\gamma\eta^2+\delta\eta^3$ et $R_m(\mu)$ le polynôme défini par

$$R_m(\mu) = \Delta_2 = (\gamma+\delta)\,(\beta+\gamma+\delta) - \alpha\delta.$$

On a

$$\begin{aligned} S_m(\mu) &= \tfrac{1}{(m+1)_2\mu^3}R_m(\mu) = [4+(m-1)\mu]\,(3+m\mu)T_m(\mu),\\ T_m(\mu) &= 5m+4+(m^2-2m-2)\mu. \end{aligned}$$

Cas particuliers $(1 \leq m \leq 2)$: $T_1(\mu) = 9-3\mu$, $T_2(\mu) = 14-2\mu$.

PROPOSITION 10. *Pour $m \geq 3$, on a $R_m(\mu) > 0$ pour tout $\mu > 0$. Pour $m \leq 2$, le polynôme R_m admet une unique racine positive ν_m ($\nu_1 = 3$, $\nu_2 = 7$) et on a $\nu_m > \mu_m$.*

Localisation des racines de P_μ^m

THÉORÈME 11. *Soit Ω la boule hermitienne de dimension 3 et soit P_μ^m le polynôme représentatif du noyau de Bergman de $\widehat{\Omega}_m(\mu)$. Pour $m \geq 6$, les racines du polynôme P_μ^m sont dans le demi-plan $\left\{\mathrm{Re}\,\eta \leq \frac{1}{2}\right\}$ quel que soit $\mu > 0$. Pour $m \leq 5$, les racines du polynôme P_μ^m sont toutes dans le demi-plan $\left\{\mathrm{Re}\,\eta \leq \frac{1}{2}\right\}$ si et seulement si $0 < \mu \leq \mu_m$, où μ_m désigne l'unique racine positive de $q_m(\mu) = P_\mu^m\left(\frac{1}{2}\right)$.*

Démonstration. En rassemblant les résultats des propositions 7, 8, 10 et en appliquant la proposition 2, on conclut que toutes les racines du polynôme P_μ^m sont dans le demi-plan $\left\{\mathrm{Re}\,\eta < \frac{1}{2}\right\}$ si et seulement si $0 < \mu < \mu_m$. Comme l'ensemble des racines varie continûment en fonction de μ, les racines du polynôme P_μ^m sont dans le demi-plan $\left\{\mathrm{Re}\,\eta \leq \frac{1}{2}\right\}$ si et seulement si $0 < \mu \leq \mu_m$. □

7.4. Type IV_3

Le domaine Ω est la boule de Lie de dimension 3. Les invariants numériques sont $a = 1$, $b = 0$, $r = 2$. Le polynôme de Hua est

$$\chi(s) = (s+1)\left(s+\tfrac{3}{2}\right)(s+2)\,.$$

Les coefficients de la décomposition de $\chi(k\mu)$ sont

$$C_0(\mu) = 1, \quad C_1(\mu) = 3\left(\tfrac{3}{2} - 2\mu\right),$$
$$C_2(\mu) = (1-\mu)\left(\tfrac{13}{2} - 7\mu\right),$$
$$C_3(\mu) = (1-\mu)(2-\mu)\left(\tfrac{3}{2} - \mu\right).$$

Le polynôme représentatif du noyau de Bergman de $\widehat{\Omega}_m(\mu)$ est

$$P_\mu^m(\eta) = (1-\mu)(2-\mu)\left(\tfrac{3}{2} - \mu\right) + (m+1)\mu(1-\mu)\left(\tfrac{13}{2} - 7\mu\right)\eta$$
$$+ 3(m+1)_2\left(\tfrac{3}{2} - 2\mu\right)\mu^2\eta^2 + (m+1)_3\,\mu^3\eta^3.$$

Signe de $P_\mu^m(\frac{1}{2})$

On a

$$P_\mu^m\left(\tfrac{1}{2}\right) = q_m(\mu) = [3 + (m-1)\mu]\,r_m(\mu),$$
$$r_m(\mu) = \tfrac{1}{8}\left(8 + 6(m-1)\mu + (m^2 - 5m - 2)\mu^2\right).$$

Cas particuliers $(1 \le m \le 5)$:

$$r_1(\mu) = \tfrac{1}{4}\left(4 - 3\mu^2\right),$$
$$r_2(\mu) = \tfrac{1}{4}(4 + 3\mu - 4\mu^2),$$
$$r_3(\mu) = \tfrac{1}{2}(1 + 2\mu)(2 - \mu),$$
$$r_4(\mu) = \tfrac{1}{4}\left(4 + 9\mu - 3\mu^2\right),$$
$$r_5(\mu) = \tfrac{1}{4}(4 + 12\mu - \mu^2).$$

Racines positives de q_m $(1 \le m \le 5)$:

$$\mu_1 = \tfrac{2}{\sqrt{3}} < \mu_2 = \tfrac{3+\sqrt{73}}{8} < \mu_3 = 2 < \mu_4 = \tfrac{9+\sqrt{129}}{6} < \mu_5 = 2(3+\sqrt{10}).$$

PROPOSITION 11. *Pour $m \ge 6$, $P_\mu^m(\frac{1}{2})$ est positif pour tout $\mu > 0$. Pour $m \le 5$, le polynôme q_m admet une seule racine positive μ_m et $P_\mu^m(\frac{1}{2})$ est positif ou nul si et seulement si $0 < \mu \le \mu_m$.*

Signe de $\frac{\mathrm{d}P_\mu^m}{\mathrm{d}\eta}\left(\frac{1}{2}\right)$

On a

$$q_m^1(\mu) = \tfrac{1}{(m+1)\mu}\tfrac{\mathrm{d}P_\mu^m}{\mathrm{d}\eta}\left(\tfrac{1}{2}\right) = \tfrac{13}{2} + \tfrac{9}{2}(m-1)\mu + \tfrac{1}{4}\left(3m^2 - 9m - 2\right)\mu^2.$$

Cas particuliers $(1 \le m \le 3)$:

$$q_1^1(\mu) = \tfrac{13}{2} - 2\mu^2,$$
$$q_2^1(\mu) = \tfrac{1}{2}(1+\mu)(13 - 4\mu),$$
$$q_3^1(\mu) = \tfrac{13}{2} + 9\mu - \tfrac{1}{2}\mu^2.$$

Racines positives de q_m^1 $(1 \le m \le 3)$:

$$0 < \mu_1^1 = \tfrac{\sqrt{13}}{2} < \mu_2^1 = \tfrac{13}{4} < \mu_3^1 = 9 + \sqrt{94},$$
$$0 < \mu_m < \mu_m^1 \qquad (1 \le m \le 3).$$

PROPOSITION 12. *Pour* $m \ge 4$*, on a* $\frac{\mathrm{d}P_\mu^m}{\mathrm{d}\eta}\left(\frac{1}{2}\right) > 0$ *pour tout* $\mu \ge 0$*. Pour* $m \le 3$*, le polynôme* q_m^1 *possède une seule racine positive* μ_m^1 *et est positif sur* $\left[0, \mu_m^1\right]$*.*

Signe de $\frac{\mathrm{d}^2 P_\mu^m}{\mathrm{d}\eta^2}\left(\frac{1}{2}\right)$

$$\tfrac{1}{(m+1)_2\mu^2}\,\tfrac{\mathrm{d}^2 P_\mu^m}{\mathrm{d}\eta^2}\left(\tfrac{1}{2}\right) = 3(3 + (m-1)\mu).$$

PROPOSITION 13. *On a* $\frac{\mathrm{d}^2 P_\mu^m}{\mathrm{d}\eta^2}\left(\frac{1}{2}\right) > 0$ *pour tout* $m \ge 1$ *et tout* $\mu > 0$*.*

Déterminant de Hurwitz Δ_2

Soient $P_\mu^m(\eta) = \alpha + \beta\eta + \gamma\eta^2 + \delta\eta^3$ et $R_m(\mu)$ le polynôme défini par

$$R_m(\mu) = \Delta_2 = (\gamma + \delta)(\beta + \gamma + \delta) - \alpha\delta.$$

On a

$$S_m(\mu) = \tfrac{1}{(m+1)_2\mu^3} R_m(\mu) = [3 + (m-1)\mu]\, s_m(\mu),$$
$$s_m(\mu) = \tfrac{35m+27}{4} + \tfrac{3(m-1)(4m+3)}{2}\mu + m(m-1)\left(m^2 - 2m - 2\right)\mu^2.$$

Cas particuliers $(1 \le m \le 2)$:

$$s_1(\mu) = \tfrac{1}{2}(31 - 6\mu^2),$$
$$s_2(\mu) = \tfrac{1}{4}\left(97 + 66\mu - 16\mu^2\right).$$

PROPOSITION 14. *Pour* $m \ge 3$*, on a* $R_m(\mu) > 0$ *pour tout* $\mu > 0$*. Pour* $1 \le m \le 2$*, le polynôme* R_m *admet une unique racine positive* ν_m *et on a* $\nu_m > \mu_m$*.*

Localisation des racines de P_μ^m

THÉORÈME 12. *Soit* Ω *un domaine symétrique de type* IV_3 *et soit* P_μ^m *le polynôme représentatif du noyau de Bergman de* $\widehat{\Omega}_m(\mu)$*. Pour* $m \ge 6$*, les racines du polynôme* P_μ^m *sont dans le demi-plan* $\left\{\mathrm{Re}\,\eta \le \frac{1}{2}\right\}$ *quel que soit* $\mu > 0$*. Pour* $m \le 5$*, les racines du polynôme* P_μ^m *sont toutes dans le demi-plan* $\left\{\mathrm{Re}\,\eta \le \frac{1}{2}\right\}$ *si et seulement si* $0 < \mu \le \mu_m$*,où* μ_m *désigne l'unique racine positive de* $q_m(\mu) = P_\mu^m\left(\frac{1}{2}\right)$*.*

Démonstration. En rassemblant les résultats des propositions 11, 12, 14 et en appliquant la proposition 2, on voit que toutes les racines du polynôme P_μ^m sont dans le demi-plan $\left\{\operatorname{Re}\eta < \frac{1}{2}\right\}$ si et seulement si $0 < \mu < \mu_m$. Comme l'ensemble des racines varie continûment en fonction de μ, les racines du polynôme P_μ^m sont dans le demi-plan $\left\{\operatorname{Re}\eta \leq \frac{1}{2}\right\}$ si et seulement si $0 < \mu \leq \mu_m$. □

7.5. Type $I_{1,4}$

Le domaine Ω est la boule unité de $\mathbb{C}^4$. On a

$$\chi(s) = (s+1)(s+2)(s+3)(s+4), \tag{45}$$

$$C_0(\mu) = 1, \quad C_1(\mu) = 10(1-\mu) \tag{46}$$

$$C_2(\mu) = 5(1-\mu)(7-5\mu), \tag{47}$$

$$C_3(\mu) = 5(1-\mu)(2-\mu)(5-3\mu), \tag{48}$$

$$C_4(\mu) = (1-\mu)(2-\mu)(3-\mu)(4-\mu). \tag{49}$$

Le polynôme représentatif du noyau de Bergman de $\widehat{\Omega}_m(\mu)$ est

$$\begin{aligned} P_\mu^m(\eta) &= \sum_{j=0}^{4} (j+m)_j C_{4-j}(\mu)\mu^j\eta^j \\ &= \left(35\mu^2 - 50\mu - 10\mu^3 + \mu^4 + 24\right) \\ &\quad + 5(1+m)\left(14\mu^3 - 21\mu^2 - 3\mu^4 + 10\mu\right)\eta \\ &\quad + 5(1+m)_2\left(5\mu^4 - 12\mu^3 + 7\mu^2\right)\eta^2 \\ &\quad + 10(1+m)_3\left(\mu^3 - \mu^4\right)\eta^3 + (1+m)_4\mu^4\eta^4. \end{aligned}$$

Signe de $P_\mu^m\left(\frac{1}{2}\right)$

On a

$$\begin{aligned} P_\mu^m\left(\frac{1}{2}\right) &= q_m(\mu) = (4+m\mu)r_m(\mu), \\ r_m(\mu) &= 6 + \frac{19m-25}{4}\mu + m(m-5)\mu^2 + \frac{m^3 - 10m^2 + 15m + 10}{16}\mu^3. \end{aligned}$$

Le polynôme $T(m) = 10 + 15m - 10m^2 + m^3$ a pour dérivée $T'(m) = 3m^2 - 20m + 15$, qui est positive si $m \geq 6$. Comme $T(7) = -32$ et $T(8) = 2$, tous les coefficients de r_m sont positifs pour $m \geq 8$, d'où $P_\mu^m\left(\frac{1}{2}\right) > 0$ si $m \geq 8$.

Cas particuliers $(1 \leq m \leq 7)$:

$$\begin{aligned}
r_1(\mu) &= (\mu-4)\left(\mu^2-\tfrac{3}{2}\right),\\
r_2(\mu) &= 6+\tfrac{13}{4}\mu-6\mu^2+\tfrac{1}{2}\mu^3,\\
r_3(\mu) &= 6+8\mu-6\mu^2-\tfrac{1}{2}\mu^3,\\
r_4(\mu) &= 6+\tfrac{51}{4}\mu-4\mu^2-\tfrac{13}{8}\mu^3,\\
r_5(\mu) &= 6+\tfrac{35}{2}\mu-\tfrac{5}{2}\mu^3,\\
r_6(\mu) &= 6+\tfrac{89}{4}\mu+6\mu^2-\tfrac{33}{12}\mu^3,\\
r_7(\mu) &= 6+27\mu+14\mu^2-2\mu^3.
\end{aligned}$$

Racines positives des polynômes $q_m(\mu) = P_\mu^m\left(\frac{1}{2}\right)$: ce sont les racines positives de $r_m(\mu)$.

- Racines positives de $r_1(\mu)$: deux racines positives

$$\mu_1 = \mu_{1,1} = \sqrt{\frac{3}{2}} < \mu_{1,2} = 4.$$

- Racines positives de $r_2(\mu)$: deux racines positives $\mu_{2,1} = \mu_2$ et $\mu_{2,2}$ telles que

$$\frac{5}{4} < \mu_{2,1} = \mu_2 < \frac{3}{2} < 10 < \mu_{2,2}.$$

- Racines positives de $r_3(\mu)$: une seule racine positive μ_3, avec

$$\frac{3}{2} < \mu_3 < \frac{7}{4}.$$

- Racines positives de $r_4(\mu)$: une seule racine positive μ_4,avec

$$2 < \mu_4 < \frac{9}{4}.$$

- Racines positives de $r_5(\mu)$: une seule racine positive μ_5, avec

$$\frac{11}{4} < \mu_5 < 3.$$

- Racines positives de $r_6(\mu)$: une seule racine positive μ_6, avec

$$4 < \mu_6 < \frac{9}{2}.$$

- Racines positives de $r_7(\mu)$: une seule racine positive μ_7, avec

$$8 < \mu_7 < 9.$$

On a $\mu_1 < \mu_2 < \mu_3 < \mu_4 < \mu_5 < \mu_6 < \mu_7$. Les résultats peuvent être vérifiés avec un logiciel de calcul formel telle que MATHEMATICA et résumés dans le tableau ci-dessous :

m	1	2	3	4	5	6	7
$\mu_{m,1}$	$\sqrt{\frac{3}{2}}$	1.41518	1.68819	2.10335	2.8029	4.22107	8.60867
$\mu_{m,2}$	4	11.333					

PROPOSITION 15. *Pour $m \geq 8$, $P_\mu^m(\frac{1}{2})$ est positif pour tout $\mu > 0$. Pour $m \leq 2$, le polynôme q_m admet deux racines positives $\mu_m = \mu_{m,1} < \mu_{m,2}$, et $P_\mu^m(\frac{1}{2})$ est positif ou nul si et seulement si $0 < \mu \leq \mu_m$ ou $\mu \geq \mu_{m,2}$. Pour $3 \leq m \leq 7$, le polynôme q_m admet une seule racine positive μ_m et $P_\mu^m(\frac{1}{2})$ est positif ou nul si et seulement si $0 < \mu \leq \mu_m$.*

Signe de $\frac{\mathrm{d}P_\mu^m}{\mathrm{d}\eta}\left(\frac{1}{2}\right)$

On a

$$\begin{aligned} q_m^1(\mu) &= \tfrac{1}{(m+1)\mu}\tfrac{\mathrm{d}P_\mu^m}{\mathrm{d}\eta}\left(\tfrac{1}{2}\right) = (5+(m-1)\mu)r_m^1(\mu), \\ r_m^1(\mu) &= 10 + 5(m-1)\mu + \tfrac{m^2-5m-4}{2}\mu^2. \end{aligned}$$

Cas particuliers $(1 \leq m \leq 5)$:

$$\begin{aligned} r_1^1(\mu) &= 2(5-2\mu^2), \\ r_2^1(\mu) &= 5(1+\mu)(2-\mu), \\ r_3^1(\mu) &= 5(2+2\mu-\mu^2), \\ r_4^1(\mu) &= 10+15\mu-4\mu^2, \\ r_5^1(\mu) &= 2(5+10\mu-\mu^2). \end{aligned}$$

Racines positives de q_m^1 $(1 \leq m \leq 5)$:

m	1	2	3	4	5
μ_m^1	$\sqrt{\frac{5}{2}}$	2	$\sqrt{3}+1$	$\frac{1}{8}\left(\sqrt{385}+15\right)$	$\sqrt{30}+5$

On a $0 < \mu_m < \mu_m^1$ $(1 \leq m \leq 5)$.

PROPOSITION 16. *Pour $m \geq 6$, on a $\frac{\mathrm{d}P_\mu^m}{\mathrm{d}\eta}\left(\frac{1}{2}\right) > 0$ pour tout $\mu > 0$. Pour $m \leq 5$, le polynôme q_m^1 possède une seule racine positive μ_m^1 et est positif sur $\left[0, \mu_m^1\right]$.*

Signe de $\frac{\mathrm{d}^2 P_\mu^m}{\mathrm{d}\eta^2}\left(\frac{1}{2}\right)$

On a

$$q_m^2(\mu) = \frac{1}{(m+1)_2\mu^2}\frac{\mathrm{d}^2 P_\mu^m}{\mathrm{d}\eta^2}\left(\frac{1}{2}\right) = \left(3m^2 - 9m - 4\right)\mu^2 + 30\,(m-1)\,\mu + 70.$$

Cas particuliers $(1 \le m \le 3)$:

$$\begin{aligned} q_1^2(\mu) &= 10\left(7 - \mu^2\right), \\ q_2^2(\mu) &= 10\left(7 + 3\mu - \mu^2\right), \\ q_3^2(\mu) &= 2\left(35 + 30\mu - 2\mu^2\right). \end{aligned}$$

Racines positives de q_m^2 $(1 \le m \le 3)$:

m	1	2	3
μ_m^2	$\sqrt{7}$	$\frac{1}{2}\sqrt{37}+\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{295}+\frac{15}{2}$

On a $0 < \mu_m < \mu_m^1 < \mu_m^2$ $(1 \le m \le 3)$ et $\mu_m^2 < \mu_{m,2}$ $(1 \le m \le 2)$.

PROPOSITION 17. *Pour $m \ge 4$, on a $\frac{\mathrm{d}^2 P_\mu^m}{\mathrm{d}\eta^2}\left(\frac{1}{2}\right) > 0$ pour tout $\mu > 0$. Pour $m \le 3$, le polynôme q_m^2 possède une seule racine positive μ_m^2 et est positif sur $\left[0, \mu_m^2\right]$.*

Signe de $\frac{\mathrm{d}^3 P_\mu^m}{\mathrm{d}\eta^3}\left(\frac{1}{2}\right)$

On a

$$\frac{1}{(m+1)_3\mu^3}\frac{\mathrm{d}^3 P_\mu^m}{\mathrm{d}\eta^3}\left(\frac{1}{2}\right) = 12\left((m-1)\,\mu + 5\right).$$

PROPOSITION 18. *On a $\frac{\mathrm{d}^3 P_\mu^m}{\mathrm{d}\eta^3}\left(\frac{1}{2}\right) > 0$ pour tout $\mu > 0$ et tout $m \ge 1$.*

Déterminant de Hurwitz Δ_3

Pour $P_\mu^m(\eta) = \alpha + \beta\eta + \gamma\eta^2 + \delta\eta^3 + \varepsilon\eta^4$, soit

$$F_m(\mu) = \Delta_3 \equiv (\varepsilon + \delta + \gamma + \beta)\left[(\varepsilon + \delta + \gamma)(\varepsilon + \delta) - \varepsilon\beta\right] - (2\varepsilon + \delta)^2\alpha.$$

On a

$$
\begin{aligned}
G_m(\mu) &= \tfrac{1}{(m+1)(m+1)_3\mu^6} F_m(\mu) = (5+(m-1)\mu)^2 (4+m\mu) S_m(\mu) \\
S_m(\mu) &= \sum_{j=0}^{3} s_j(m)\mu^j, \\
s_0(m) &= 2\left(53+140m+63m^2\right), \\
s_1(m) &= -75-189m+55m^2+81m^3, \\
s_2(m) &= 2m\left(-5-52m-15m^2+8m^3\right), \\
s_3(m) &= 5+15m+20m^2-4m^3-5m^4+m^5.
\end{aligned}
$$

Pour $m > 4$, les coefficients $s_j(m)$ sont tous positifs.
Cas particuliers :

$$
\begin{aligned}
S_1(\mu) &= 32(\mu-2)(\mu+2)(\mu-4), \\
S_2(\mu) &= 1170+415\mu-521\mu^2+35\mu^3, \\
S_3(\mu) &= 40(4-\mu)\left(16\mu+\mu^2+13\right), \\
S_4(\mu) &= 3242+5233\mu+354\mu^2-127\mu^3.
\end{aligned}
$$

Racines positives des polynômes S_m $(1 \leq m \leq 4)$:

- Le polynôme $S_1(\mu)$ admet deux racines positives

$$\sigma_1 = \sigma_{1,1} = 2 < \sigma_{1,2} = 4.$$

- Le polynôme $S_2(\mu)$ admet deux racines positives $\sigma_2 = \sigma_{2,1}$ et $\sigma_{2,2}$ avec

$$2 < \sigma_{2,1} < \frac{5}{2} < \frac{27}{2} < \sigma_{2,2} < 14.$$

- Le polynôme $S_3(\mu)$ admet une seule racine positive $\sigma_3 = 4$.
- Le polynôme $S_4(\mu)$ admet une seule racine positive σ_4 comprise entre 8 et 9.

Les résultats ci-dessus peuvent être vérifiés avec un logiciel de calcul formel telle que MATHEMATICA et résumés dans le tableau ci-dessous :

m	1	2	3	4
$\sigma_m = \sigma_{m,1} \simeq$	2	2.15132	4	8.19532
$\sigma_{m,2} \simeq$	4	13.8558		

On a $\mu_m^1 < \sigma_{m,1} < \sigma_{m,2}$ $(m = 1,2)$ et $\mu_m^1 < \sigma_m$ $(m = 3,4)$, où μ_m^1 est la racine positive de q_m^1.

PROPOSITION 19. *Pour $m > 4$, on a $F_m(\mu) > 0$ pour tout $\mu > 0$. Pour $m \leq 4$, on a $F_m(\mu) > 0$ et $\frac{\mathrm{d}P^1_\mu}{\mathrm{d}\eta}\left(\frac{1}{2}\right) \geq 0$ si et seulement si $\mu \leq \mu^1_m$.*

Localisation des racines de P^m_μ

THÉORÈME 13. *Les racines du polynôme P^m_μ sont toutes situées dans le demi-plan $\left\{\operatorname{Re}\eta \leq \frac{1}{2}\right\}$*

- *pour $m \geq 8$ et pour tout $\mu > 0$;*
- *pour $1 \leq m \leq 7$, si et seulement si $0 < \mu \leq \mu_m$, où μ_m est la plus petite racine positive de $q_m(\mu) = P^m_\mu\left(\frac{1}{2}\right)$.*

Démonstration. En rassemblant les résultats des propositions (15, 16, 17) et en appliquant la proposition 19, on voit que toutes les racines du polynôme P^m_μ sont dans le demi-plan $\left\{\operatorname{Re}\eta < \frac{1}{2}\right\}$ pour $0 < \mu < \mu_m$. Comme l'ensemble des racines varie continûment en fonction de μ, les racines du polynôme P^m_μ sont dans le demi-plan $\left\{\operatorname{Re}\eta \leq \frac{1}{2}\right\}$ si et seulement si $0 < \mu \leq \mu_m$. $\square$

7.6. Type IV_4

Le domaine Ω est la boule de Lie de dimension 4. Les invariants numériques sont $a = 2$, $b = 0$, $r = 2$. Le polynôme de Hua est

$$\chi(s) = (s+1)(s+2)^2(s+3).$$

Les coefficients de la décomposition de $\chi(\mu k)$ sont

$$C_0(\mu) = 1, \quad C_1(\mu) = 2(4-5\mu), \quad C_2(\mu) = (1-\mu)(23-25\mu),$$
$$C_3(\mu) = (1-\mu)(7-5\mu)(4-3\mu), \quad C_4(\mu) = (1-\mu)(2-\mu)^2(3-\mu).$$

Le polynôme représentatif du noyau de Bergman de $\widehat{\Omega}_m(\mu)$ est

$$\begin{aligned} P^m_\mu(\eta) &= (1-\mu)(2-\mu)^2(3-\mu) + (m+1)(1-\mu)(7-5\mu)(4-3\mu)\mu\eta \\ &\quad + (m+1)_2(1-\mu)(23-25\mu)\mu^2\eta^2 + 2(m+1)_3(4-5\mu)\mu^3\eta^3 \\ &\quad + (m+1)_4\mu^4\eta^4. \end{aligned}$$

Signe de $P^m_\mu(\frac{1}{2})$

Soit $q_m(\mu) = P^m_\mu\left(\frac{1}{2}\right)$. On a

$$\begin{aligned} q_m(\mu) &= 12 + 14(m-1)\mu + \tfrac{23}{4}m(m-3)\mu^2 \\ &\quad + (m-1)(m^2-5m-2)\mu^3 + \tfrac{1}{16}\left(m^3 - 10m^2 + 15m + 10\right)\mu^4. \end{aligned}$$

Pour $m \geq 8$, les coefficients de q_m sont tous positifs.
Cas particuliers ($1 \leq m \leq 7$) :

$$\begin{aligned}
q_1(\mu) &= \tfrac{1}{2}\left(24 - 23\mu^2 + 2\mu^4\right), \\
q_2(\mu) &= \tfrac{1}{2}\left(24 + 28\mu - 23\mu^2 - 16\mu^3 + 2\mu^4\right), \\
q_3(\mu) &= \tfrac{1}{2}\left(24 + 56\mu - 32\mu^3 - 3\mu^4\right), \\
q_4(\mu) &= \tfrac{1}{2}\left(24 + 84\mu + 46\mu^2 - 36\mu^3 - 13\mu^4\right), \\
q_5(\mu) &= \tfrac{1}{2}\left(24 + 112\mu + 115\mu^2 - 16\mu^3 - 25\mu^4\right), \\
q_6(\mu) &= \tfrac{1}{2}\left(24 + 140\mu + 207\mu^2 + 40\mu^3 - 33\mu^4\right), \\
q_7(\mu) &= 12 + 84\mu + 161\mu^2 + 72\mu^3 - 14\mu^4.
\end{aligned}$$

Racines positives des polynômes q_m ($1 \leq m \leq 7$) :

- Racines positives de q_1 : deux racines positives
$$\mu_{1,1} = \mu_1 = \frac{1}{2}\sqrt{23 - \sqrt{337}} < 2 < \mu_{1,2} = \frac{1}{2}\sqrt{23 + \sqrt{337}}.$$
- Racines positives de q_2 : deux racines positives $\mu_{2,1}$et $\mu_{2,2}$ telles que
$$1 < \mu_{2,1} = \mu_2 < \frac{5}{4} < 9 < \mu_{2,2} < \frac{37}{4}.$$
Comme $q_2(\mu_1) > 0$, on $\mu_1 < \mu_2$.
- Racines positives de q_3 : une seule racine positive μ_3 comprise entre $\frac{5}{4}$ et $\frac{3}{2}$.
- Racines positives de q_4 : une unique racine positive μ_4, avec $\frac{3}{2} < \mu_4 < \frac{7}{4}$.
- Racines positives de q_5 : une seule racine positive μ_5, $2 < \mu_5 < \dfrac{5}{2}$.
- Racines positives de q_6 : une seule racine positive μ_6, $3 < \mu_6 < \dfrac{7}{2}$.
- Racines positives de q_7 : une seule racine positive μ_7, $\frac{13}{2} < \mu_7 < 7$.

On a $\mu_1 < \mu_2 < \mu_3 < \mu_4 < \mu_5 < \mu_6 < \mu_7$. Les calculs ci-dessus peuvent être vérifiés par un logiciel de calcul formel tel que MATHEMATICA et résumés dans le tableau ci-dessous :

m	1	2	3	4	5	6	7
$\mu_{m,1}$	1.07732	1.21176	1.41824	1.74173	2.29476	3.42405	6.92986
$\mu_{m,2}$	3.21549	9.08062					

On note $\mu_m = \mu_{m,1}$ ($1 \leq m \leq 7$).

PROPOSITION 20. *Pour $m \geq 8$, $P_\mu^m(\frac{1}{2})$ est positif pour tout $\mu > 0$. On a :*

1. *$P_\mu^m(\frac{1}{2}) \geq 0$ pour $0 < \mu \leq \mu_{m,1}$ et $\mu_{m,2} \leq \mu$ ($1 \leq m \leq 2$) ;*
2. *$P_\mu^m(\frac{1}{2}) \geq 0$ si $0 < \mu \leq \mu_m = \mu_{m,1}$ ($3 \leq m \leq 7$).*

Signe de $\frac{\mathrm{d}P_\mu^m}{\mathrm{d}\eta}\left(\frac{1}{2}\right)$

On a

$$\begin{aligned} q_m^1(\mu) &= \tfrac{1}{(m+1)\mu}\tfrac{\mathrm{d}P_\mu^m}{\mathrm{d}\eta}\left(\tfrac{1}{2}\right) = [4+(m-1)\mu]\, r_m^1, \\ r_m^1(\mu) &= 7+4(m-1)\mu+\tfrac{1}{2}\left(m^2-5m-4\right)\mu^2. \end{aligned}$$

Cas particuliers ($1 \leq m \leq 5$) :

$$\begin{aligned} r_1^1(\mu) &= 7-4\mu^2, \\ r_2^1(\mu) &= 7+4\mu-5\mu^2, \\ r_3^1(\mu) &= 7+8\mu-5\mu^2, \\ r_4^1(\mu) &= (1+2\mu)(7-2\mu), \\ r_5^1(\mu) &= \left(7+16\mu-2\mu^2\right). \end{aligned}$$

Racines positives de q_m^1 ($1 \leq m \leq 5$) :

m	1	2	3	4	5
μ_m^1	$\frac{\sqrt{7}}{2}$	$\frac{\sqrt{39}+2}{5} \simeq 1.649$	$\frac{\sqrt{51}+4}{5} \simeq 2.22829$	$\frac{7}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{78}+4 \simeq 8.41588$

On a $0 < \mu_{m,1} < \mu_m^1 < \mu_{m,2}$ ($1 \leq m \leq 2$) et $0 < \mu_m < \mu_m^1$ ($3 \leq m \leq 5$).

PROPOSITION 21. *Pour $m \geq 6$, on a $\frac{\mathrm{d}P_\mu^m}{\mathrm{d}\eta}\left(\frac{1}{2}\right) > 0$ pour tout $\mu \geq 0$. Pour $m \leq 5$, le polynôme q_m^1 possède une seule racine positive μ_m^1 et est positif sur $\left[0, \mu_m^1\right]$.*

Signe de $\frac{\mathrm{d}^2 P_\mu^m}{\mathrm{d}\eta^2}\left(\frac{1}{2}\right)$

On a

$$q_m^2(\mu) = \tfrac{1}{(m+1)_2\mu^2}\tfrac{\mathrm{d}^2 P_\mu^m}{\mathrm{d}\eta^2}\left(\tfrac{1}{2}\right) = 46+24(m-1)\mu+\left(3m^2-9m-4\right)\mu^2.$$

Cas particuliers :

$$\begin{aligned} q_1^2(\mu) &= 2(23-25\mu^2), \\ q_2^2(\mu) &= 2\left(23+12\mu-5\mu^2\right), \\ q_3^2(\mu) &= 2\left(23+24\mu-2\mu^2\right). \end{aligned}$$

Racines positives de q_m^2 $(1 \leq m \leq 3)$:

m	1	2	3
μ_m^2	$\frac{1}{5}\sqrt{23} \simeq 2.14476$	$\frac{1}{5}\sqrt{151}+\frac{6}{5} \simeq 3.65764$	$\frac{1}{2}\sqrt{190}+6 \simeq 12.892$

On a $\mu_1^m < \mu_2^m$ $(1 \leq m \leq 3)$.

PROPOSITION 22. *On a* $\frac{\mathrm{d}^2 P_\mu^m}{\mathrm{d}\eta^2}\left(\frac{1}{2}\right) > 0$ *pour tout* $m \geq 4$ *et tout* $\mu > 0$. *Pour* $m \leq 3$, *le polynôme* q_m^2 *possède une seule racine positive* μ_m^2 *et est positif si* $0 < \mu < \mu_m^2$. *En particulier, on a* $\frac{\mathrm{d}^2 P_\mu^m}{\mathrm{d}\eta^2}\left(\frac{1}{2}\right) > 0$ *pour* $1 \leq m \leq 7$ *et* $0 < \mu \leq \mu_m$.

Signe de $\frac{\mathrm{d}^3 P_\mu^m}{\mathrm{d}\eta^3}\left(\frac{1}{2}\right)$

$$\frac{1}{(m+1)_3\mu^3}\frac{\mathrm{d}^3 P_\mu^m}{\mathrm{d}\eta^3}\left(\frac{1}{2}\right) = 12\left[4+(m-1)\mu\right].$$

PROPOSITION 23. *On a* $\frac{\mathrm{d}^3 P_\mu^m}{\mathrm{d}\eta^3}\left(\frac{1}{2}\right) > 0$ *pour tout* $m \geq 1$ *et tout* $\mu > 0$.

Déterminant de Hurwitz Δ_3

Pour $P_\mu^m(\eta) = \alpha+\beta\eta+\gamma\eta^2+\delta\eta^3+\varepsilon\eta^4$, soit

$$F_m(\mu) = \Delta_3 \equiv (\varepsilon+\delta+\gamma+\beta)\left[(\varepsilon+\delta+\gamma)(\varepsilon+\delta)-\varepsilon\beta\right]-(2\varepsilon+\delta)^2\alpha.$$

On a

$$\begin{aligned}
G_m(\mu) &= \frac{1}{(m+1)(m+1)_3\mu^6}F_m(\mu) = (4+(m-1)\mu)^2 S_m(\mu),\\
S_m(\mu) &= \sum_{j=0}^{4} s_j(m)\mu^j,\\
s_0(m) &= 160+481m+225m^2,\\
s_1(m) &= 16\,(m-1)\left(9+31m+15m^2\right),\\
s_2(m) &= 2m\left(-35-196m-22m^2+47m^3\right),\\
s_3(m) &= 8\,(m-1)\left(-2-8m-15m^2-3m^3+2m^4\right),\\
s_4(m) &= m\left(5+15m+20m^2-4m^3-5m^4+m^5\right).
\end{aligned}$$

Pour $m > 4$, les coefficients $s_j(m)$ sont tous positifs.

Cas particuliers :

$$
\begin{aligned}
S_1(\mu) &= 2\left(433 - 206\mu^2 + 16\mu^4\right), \\
S_2(\mu) &= 2\,(1+\mu)\left(1011 + 37\mu - 315\mu^2 + 35\mu^3\right), \\
S_3(\mu) &= 4\left(907 + 1896\mu + 672\mu^2 - 320\mu^3 - 30\mu^4\right), \\
S_4(\mu) &= 4\left(1421 + 4476\mu + 3674\mu^2 + 276\mu^3 - 127\mu^4\right).
\end{aligned}
$$

Racines positives des polynômes S_m $(1 \le m \le 4)$:

- Le polynôme S_1 admet deux racines positives :

$$\sigma_{1,1} = \tfrac{1}{4}\sqrt{103 - 3\sqrt{409}} < 2 < \sigma_{m,2} = \tfrac{1}{4}\sqrt{103 + 3\sqrt{409}}.$$

- Racines positives de S_2 : deux racines positives $\sigma_2 = \sigma_{2,1}$et $\sigma_{2,2}$ telles que

$$2 < \sigma_{2,1} < \frac{9}{4} < \frac{33}{4} < \sigma_{2,2} < \frac{17}{2}.$$

- Racines positives de S_3 : une seule racine positive $\sigma_3 = \sigma_{3,1}$ telle que

$$3 < \sigma_3 = \sigma_{3,1} < \frac{13}{4}.$$

- Racines positives de S_4 : admet une seule racine positive $\sigma_4 = \sigma_{4,1}$ telle que

$$7 < \sigma_3 = \sigma_{3,1} < \frac{29}{4}.$$

Les calculs ci-dessus peuvent être vérifiés par n'importe quel logiciel de calcul formel tel que MATHEMATICA et résumés dans le tableau ci-dessous :

m	1	2	3	4
$\sigma_m = \sigma_{m,1} \simeq$	1.62651	2.12869	3.22913	7.03204
$\sigma_{m,2} \simeq$	3.19835	8.47286		

On a $\mu_m^1 < \sigma_{m,1} < \sigma_{m,2}$ $(m = 1,2)$ et $\mu_m^1 < \sigma_m$ $(m = 3,4)$, où μ_m^1 est la racine positive de q_m^1.

PROPOSITION 24. *Pour $m > 4$, on a $F_m(\mu) > 0$ pour tout $\mu > 0$. Pour $m \le 4$, on a $F_m(\mu) > 0$ et $\frac{\mathrm{d}P_\mu^1}{\mathrm{d}\eta}\left(\frac{1}{2}\right) \ge 0$ si et seulement si $\mu \le \mu_m^1$.*

Localisation des racines de P_μ^m

THÉORÈME 14. *Les racines du polynôme P_μ^m sont toutes situées dans le demi-plan* $\left\{\mathrm{Re}\,\eta \leq \frac{1}{2}\right\}$

- *pour $m \geq 8$ et pour tout $\mu > 0$;*
- *pour $1 \leq m \leq 7$, si et seulement si $0 < \mu \leq \mu_m$, où μ_m est la plus petite racine positive de $q_m(\mu) = P_\mu^m\left(\frac{1}{2}\right)$.*

Démonstration. En rassemblant les résultats des propositions 20, 21, 22, 23 et en appliquant la proposition 24, on voit que toutes les racines du polynôme P_μ^m sont dans le demi-plan $\left\{\mathrm{Re}\,\eta < \frac{1}{2}\right\}$ si et seulement si $0 < \mu < \mu_m$. Comme l'ensemble des racines varie continûment en fonction de μ, les racines du polynôme P_μ^m sont dans le demi-plan $\left\{\mathrm{Re}\,\eta \leq \frac{1}{2}\right\}$ si et seulement si $0 < \mu \leq \mu_m$. $\square$

Références

[1] SELBERG A., *Bemerkninger om et multiplet integral*, Norske Mat. Tidsskr. **26** (1944), 71–78.

[2] GANTMACHER F.R., *Théorie des matrices, t.2, Questions spéciales et applications*, Dunod, Paris 1965.

[3] BOAS H. AND HAROLD P., *The Lu Qi-Keng conjecture fails generically*, Proc. Amer. Math. Soc., **124** (1996), 2021–2027.

[4] BOAS H., FU SIQI AND STRAUBE E., *The Bergman kernel function: explicit formulas and zeroes*, Proc. Amer. Math. Soc., **127** (1999), 805–811.

[5] YIN WEIPING, LU KEPING AND ROOS GUY, *New classes of domains with explicit Bergman kernel*, Science in China Ser. A Mathematics **47** (2004), 352–371.

[6] ROOS GUY, *Weighted Bergman kernels and virtual Bergman kernels*, Science in China Ser. A Mathematics **48** (2005), 225–237.

[7] YIN WEIPING, *Lu Qi-Keng conjecture and Hua domain* (dedicated to Lu Qi-Keng on the occasion of his 80th birthday), Science in China (A), **51** (2008), 803–818.

AMS Subject Classification: 32M15, 32A36

Fatma Zohra DEMMAD-ABDESSAMEUD,
Département de Mathématiques, Faculté des Sciences, Université de Blida,
Route de Soumâa, BP 270, Blida 09000, ALGÉRIE
email : `fz_demmad@mail.univ-blida.dz, fz_demmad@yahoo.fr`

Lavoro pervenuto in redazione il 02.02.2007 e, in forma definitiva, il 16.12.2007.