

J. Dhombres

**RHÉTORIQUE ET ALGÈBRE AU TEMPS DES LUMIÈRES.
LA QUESTION DE LA NATURE DES QUANTITÉS
IMAGINAIRES SELON EULER, DAVIET DE FONCENEX, ET
LAPLACE**

Abstract. As is the case for all authors, mathematicians are using rhetorical methods in order to present their results, and they are not afraid of doing so. However, using an oxymoron is not usual, but the case existed with the expression “imaginary quantities”. The purpose of this paper is to look at the way three mathematicians during the eighteenth century, Euler, de Foncenex and Laplace, avoided the other expression “impossible quantities” while providing proofs to the so-called fundamental theorem of algebra. This theorem cannot be proven purely in algebra, and requires, as we know, some result from analysis on the real line. We thus may distinguish a rhetorical form about the insufficiency of algebra, the rhetorical form of an academic paper, and the rhetorical form of success. Another purpose is to show that this kind of rhetorical analysis helps understanding the nature of proofs involved.

Sous le titre de “rhétorique et algèbre”, je m’intéresse à un thème qui a été façonné par la langue, et a tout autant été un enjeu de pouvoir des mots et des signes sur les idées aussi bien que sur les objets mathématiques. Je m’intéresse en effet à l’expression de “quantité imaginaire”, moins bien datée qu’on ne le pense généralement puisque Descartes, l’inventeur du mot “imaginaire”, expliquait d’emblée que cet adjectif ne pouvait qualifier une quantité. Il devenait difficile de faire en mathématiques un substantif du mot “imaginaire”. Ainsi, l’intrusion d’un vocabulaire paradoxal pour qualifier la liaison entre “quantité” et “imaginaire” dans l’algèbre, alors entendue comme l’art analytique par excellence et la voie même des Modernes, ne pouvait qu’interpeller Condillac, le grand simplificateur de la pensée des Lumières, et le contemporain d’un quelconque surplomb idéal. Le rôle que Condillac allouait au signe porteur de l’analogie devait faire paraître toute invention comme facile, et le génie comme étant à la portée de tous. Pourtant, lui-même renonça à expliquer les quantités imaginaires dans son ouvrage, la *Langue des calculs*, qui fut publié de façon posthume pour le bénéfice imaginé d’une nouvelle école analytique dans une république nouvelle.¹ Cet échec de Condillac ne tient-il pas à ce que l’expression de “quantité imaginaire” s’accompagna de l’affirmation qu’elle se caractérisait comme n’ayant pas de signe ? L’effet du double sens du mot “signe” a persisté, puisque Alan Sokal a malicieusement parlé de la complexité des imaginaires, “branche nouvelle et encore spéculative de la physique mathématique”,² dans son article en faux-semblant qui a déclenché la question des impostures de littéraires, de philosophes, et de scientifiques aussi, utilisant sans

¹Condillac, *La Langue des calculs*, édition posthume, Paris, Imp. C. Houel, an VI ; édition critique du texte paru dans les œuvres complètes de Condillac, 1798, texte établi par Anne-Marie Chouillet, notes de Sylvain Auroux, Presses universitaires de Lille, Lille, 1981 ; Jean Dhombres, *La langue des calculs*, ou comment propager les Lumières, *Sciences et Techniques en Perspective*, 2, 1982/1983, pp. 197-230.

²Alan Sokal, Jean Bricmont, *Impostures intellectuelles*, Ed. Odile Jacob, Paris, 1997, p. 236n.

vergogne les hardes langagières de la science.

Par une sorte de rétroversion, me voilà arrêté à mon tour ! N'est-il pas requis en histoire des sciences, et lorsque de rhétorique il est question ou plus généralement d'organisation littéraire des textes, de s'armer d'une foule de références justificatives dans les "sciences littéraires" ? Au-delà du pamphlet de Sokal, c'est encore un effet pervers de la vieille coupure des deux cultures décrite par C.P. Snow juste dans l'après seconde guerre mondiale, que soit assumée une position bien retranchée *in scientific practice itself, where words refer unproblematically and scientific rhetoric reproduces uncluttered inferential reasoning*.³ La rigueur scientifique serait devenue naïveté, ou prétention intenable, sinon idéologie spontanée. Ainsi donc se justifie Peter Dear dans l'introduction d'un ouvrage à plusieurs voix, sorti en 1991, et où d'entrée de jeu s'accumulent les références explicitement entendues comme un extérieur à la science pour mieux la dire. Le texte qui construit cette externalité consent cependant, dans une note involontairement ironique, à ce que les scientifiques ne soient pas toujours extérieurs à leur propres productions : *Reflective self-awareness by scientists certainly exists, of course*.⁴ Le "bien sûr" s'applique-t-il aux mathématiciens qui, depuis Euclide jusqu'à Bourbaki, sont d'une extrême rigueur, à la façon des poètes, sur les procédures stylistiques, et accordent toujours une grande importance à la langue, à son histoire, et à son organisation, et il suffirait de citer Poincaré, Hardy, ou Viète. Il est vrai que la langue était mise au service de leurs intérêts de connaissance. Telle est d'ailleurs la raison pour laquelle l'expression de "quantité imaginaire" n'est pas anecdotique. Elle obligea à penser l'insuffisance algébrique des nombres réels, et prépara sans pouvoir le deviner le champ des nombres complexes comme clôture algébrique des réels. Est-ce bien alors l'effet rhétorique du paradoxe qui était cherché initialement dans "quantité imaginaire" ? Je privilégie plutôt l'aspect créatif du mot "imaginaire", et son rôle non moins rhétorique, comme je n'aurais aucune réticence à parler d'un effet baroque du mot chez Descartes. Mais ce n'est pas ici mon propos.⁵

Revenant en effet aux reproches de Peter Dear sur l'écriture de l'histoire des sciences, je suis surpris qu'il n'évoque pas les histoires des mathématiques, celles d'hier ou d'aujourd'hui, qui argumentent souvent sinon toujours sur la syntaxe comme sur la sémantique des mathématiciens. Ceux-ci sont étudiés, il est vrai, en cherchant ce qui fut inventé. La littérature est donc riche des discussions sur les mots, rapport, proportion, analogie, différentielle, fonction, espace, courbe, etc. N'est-ce pas d'ailleurs sur des comportements textuels mathématiques que Gilles-Gaston Granger a développé une *Philosophie du style* ?⁶ Le philosophe n'aborde pourtant les imaginaires que pour une seule des idées que ces quantités ont aidée à faire surgir, et parle de "style vecto-

³Peter Dear, *The Literary Structure of Scientific Argument. Historical Studies*, University of Pennsylvania Press, 1991, p. 5.

⁴*Idem*.

⁵L'étude, mise sous le nom d'*ingenium*, des imaginations chez Descartes, étude qui pourrait servir pour celle des imaginaires cartésiennes dont je préviens que je ne m'occupe pas ici, a fait l'objet d'un très intéressant travail de synthèse par Michel Fichant, republié comme premier chapitre dans une réunion de divers articles, *Science et métaphysique dans Descartes et Leibniz*, PUF, Paris, 1998.

⁶Gilles-Gaston Granger, *Essai d'une philosophie du style*, édition revue et corrigée, Ed. Odile Jacob, Paris, 1988.

riel” avec les quaternions. Un style est une réussite lorsque les mots consonnent avec les théories mathématiques qu’ils servent, et l’on ne parle donc pas d’un style des imaginaires. Dans le cas de l’algèbre du temps des Lumières, si se pose sérieusement la question des quantités imaginaires, comme le prouve l’œuvre de Condillac, c’est bien que l’expression n’entraînait aucune convenance. Mais l’expression rappelle la très ancienne question des nombres irrationnels, dont bien des historiens disent qu’elle est la cause majeure de la grandeur mathématique grecque. Justement, œuvre d’un philosophe sur les mathématiques et leurs signes ou symboles, la *Langue des Calculs* en argumentant que seule l’algèbre était une “langue bien faite”, a pu créer le présupposé lui ci-dessus d’un exil volontaire des scientifiques de toute rhétorique.

C’est sans doute la raison pour laquelle Marc Fumaroli, il y a déjà quelques années, a voulu débusquer chez l’analytique Descartes écrivant le *Discours de la méthode* les traces d’une rhétorique⁷ que les mathématiciens connaissaient depuis longtemps en lisant le même Descartes écrivant la *Géométrie* comme un essai appuyant le *Discours de la méthode*. Tous avaient reconnu qu’il jouait en rhétoricien de sa résolution analytique du problème de Pappus pour donner à voir sa méthode. Tous avaient noté l’emploi d’un “je” péremptoire pour l’introduction de la méthode des coordonnées (“Premièrement je suppose la chose comme déjà faite, et pour me démêler de la confusion de toutes ces lignes...”,⁸) et noté son appel au lecteur à la façon d’un acteur du théâtre napolitain (“Et ainsi vous voyez...”,⁹). Tous les mathématiciens savent qu’en inventant l’expression “imaginaire”, Descartes a créé, et que sa réussite est celle d’un concept, mais comme en potentialité, ou en attente de mieux. Le mot reste encore employé aujourd’hui, en concurrence du mot “complexe” qui a la préférence. C’est que le nouveau mot achève ce qui était mis en préparation sous l’expression de “quantité imaginaire”. Le nouveau mot provient d’une autre création, mais elle est à la suite même de celle d’imaginaire. C’est cette création et sa présentation par quelques textes qui fait l’objet de la présente étude, non la préparation rhétorique de Descartes.¹⁰

Détruisant tout effet du mot à l’époque même des Lumières, mais usant du jeu rhétorique de la surprise par la concision, d’Alembert définissait les quantités imaginaires dans l’*Encyclopédie* comme étant les “racines paires des quantités négatives”. Dans cette définition où joue la parité, nous ne nous retrouvons guère aujourd’hui.¹¹ Mais son compère littéraire dans l’entreprise encyclopédique, Denis Diderot, cette fois dans une des feuilles de l’arbre illustré encyclopédique, avait défini négativement les effets de la rhétorique. Il l’entendait comme “l’art d’appliquer et d’adresser les préceptes

⁷Marc Fumaroli, *Ego scriptor*. Rhétorique et philosophie dans le *Discours de la méthode* in *Problématique du Discours de la méthode et des Essais*, Vrin, Paris, 1988. Voir aussi, Thomas A. Carr, *Descartes and the Resilience of Rhetoric*, Southern Illinois University Press, Carbondale, 1990.

⁸René Descartes, *La géométrie*, in *Œuvres de Descartes*, Vrin éditions, Paris, 1996, p. 310 de l’édition originale de 1637.

⁹*Idem*, p. 312.

¹⁰Dans un livre court, et qui fait remarquablement le tour des démonstrations du théorème fondamental de l’algèbre, le mot “imaginaire” est associé seulement à “imaginary unit” ($i = \sqrt{-1}$), et un nombre imaginaire est celui de la forme iy , pour un réel $y \neq 0$ (Benjamin Fine, Gerhard Rosenber, *The Fundamental Theorem of Algebra*, Springer Verlag, 1997, p. 10).

¹¹Entrée “Imaginaire”, mot justement limité à sa valeur d’adjectif, signée du (0) de d’Alembert dans l’*Encyclopédie*.

de la raison à l'imagination et de les rendre si frappants pour elle que la volonté et les désirs en soient affectés". Les imaginaires cartésiennes — et je les désigne quand même comme un substantif parce que les démonstrations du temps des Lumières évoquées plus loin l'exigeront —, auraient peut-être selon cette remarque de Diderot le défaut d'affecter le désir des mathématiciens de les réduire. De les réduire pourtant à moins que les complexes à la façon de d'Alembert s'exprimant dans l'*Encyclopédie*. D'un pirouette toutefois, Diderot se reprend : "la fin ou le but de la rhétorique est de remplir l'imagination d'idées et d'images vives qui puissent aider la nature sans l'accabler". Je tente alors de voir ces idées et ces images venir secourir la nature d'abord algébrique des imaginaires cartésiennes, pour étendre leur nature vers l'analyse, et non la restreindre comme on l'entend trop souvent aux seuls complexes.¹² Une fois l'analyse fondée, il devint possible de perdre la mémoire des imaginaires, pour ne garder que les complexes. Ce n'est pourtant pas non plus cette perte de mémoire que je vais étudier ici par le biais de la rhétorique des mathématiciens : je préfère, surtout pour des raisons de place, n'envisager que la voie triomphale des imaginaires pendant les Lumières, et leur sortie du carcan algébrique par les preuves successives de ce que l'on a appelé le "théorème fondamental de l'algèbre". Car la dénomination est un peu par dérision, un effet rhétorique certain, puisque toute preuve de ce théorème sortait du domaine propre de l'algèbre polynomiale.

Peter Dear a cependant raison de rappeler qu'il existe une érudite et dynamique tradition d'études formelles des textes, dont les historiens des sciences peuvent ignorer les productions récentes, qui les aideraient pourtant à revisiter un dossier aussi parcouru que celui des quantités imaginaires, et à ne pas réduire leur emploi au cheminement vers les nombres complexes entendus comme simple extension du champ de l'opération de la racine carrée.¹³ Par ignorance, des aspects de l'analyse littéraire ont été trop négligés jusqu'ici en histoire des mathématiques. Ainsi du classement des textes par genres, classement entendu non comme une différenciation de styles, mais comme réponses à la triple question que l'on doit avoir d'emblée face à un texte : qui s'adresse à qui, d'où, et pourquoi ? Ce n'est que récemment que l'on a considéré les *Eléments* d'Euclide comme le genre du *text-book*, et je préfère ne pas dire le genre du manuel. Car il faudrait d'une part y ajouter la connotation scolaire, et d'autre part éliminer du manuel l'idée d'un *vade mecum* professionnel d'une discipline.¹⁴ Euclide est donc ce *magister* qui parle d'une science au parfait, mais ce ne veut pas dire qu'elle recouvre toute la science mathématique. On étudie cette science contenue dans les *Eléments* au titre d'un chef d'œuvre de la pensée humaine, susceptible comme d'autres chefs d'œuvre,

¹²Je ne m'intéresse donc pas ici à l'approche poétique, ou "rhétorique profonde" selon le mot de Fernand Halpin dans *Les structures rhétoriques de la science* (Paris, Seuil, 2004), et il explore ainsi remarquablement la formation des représentations. Il me semble en effet que cette façon de prendre, non encore faite pour les imaginaires, irait beaucoup mieux pour étudier la représentation géométrique de ces quantités. Ce que je n'entreprends pas ici.

¹³Mais encore faut-il fournir à ces historiens des références, et un peu moins de références d'historiens des sciences jouant aux apprentis littéraires. On se souvient trop des historiens des sciences jouant aux apprentis sociologues, et se gardant tant de citer des sources de sociologie que d'appliquer les méthodes de cette discipline, comme Pierre Bourdieu le fit comprendre dans ses dernières leçons au Collège de France (*La science de la science et réflexivité*, Raisons d'agir Editions, Paris, 2002).

¹⁴*Les Eléments d'Euclide*, trad. fr. Bernard Vitrac, vol. 1, PUF, Paris, 1990.

de commentaires scolaires d'appréciation, d'interprétation ou de réorganisation. Ces commentaires sont par nature conservateurs, en ce sens qu'aucune intrusion de conceptions nouvelles n'est possible. Ainsi ce genre du *text-book*, d'ailleurs largement expurgé pour faire une bonne partie du *quadrivium*, ne pouvait recevoir l'algèbre, pour laquelle il fallut trouver de nouveaux moyens d'expression.¹⁵ Le genre universitaire pouvait encore moins recevoir les quantités imaginaires. Faut-il pour autant parler d'un genre algébrique en ce qu'il serait le refuge des fictions mathématiques dont les imaginaires deviendraient le paradigme ? Dans ses *Réflexions sur la métaphysique du calcul infinitésimal*, livre sorti en 1797 à peu près en même temps que la *Langue des Calculs*, Lazare Carnot pensait la mathématique comme créatrice de fictions, alors que le calcul proprement dit avait comme justification de les éliminer.¹⁶ Au moins, chacun conviendra qu'avant l'écriture algébrique un texte mathématique pouvait être lu par tout un chacun sachant lire. Aujourd'hui encore, il est impossible de publier dans un journal quotidien l'écriture d'un polynôme ! Mais si on peut communément parler des imaginaires, et Sokal l'a ironiquement montré, c'est bien que l'on pressent qu'il y a là bien plus qu'un jeu de mots, et sinon une invention, du moins la préparation de celle-ci.

Il y a effectivement des effets de séparation disciplinaire créés par les genres littéraires, mais pour aborder par ce biais notre sujet limité sur les quantités imaginaires au temps des Lumières, l'étude doit être orientée vers cette forme de rhétorique qui use des genres au sein même des textes mathématiques. Ainsi, le passage à l'écriture algébrique peut apparaître, à certains moments, comme jouant le rôle d'une figure en géométrie, un positionnement et une relaxation pour l'esprit qui a d'un coup tout une situation présente à l'œil. C'est un des moyens utilisés par Descartes pour, pourrait-on dire plus communément à propos de l'effet rhétorique, "faire passer l'algèbre". Elle n'avait pas droit de cité dans la mathématique officielle d'alors, c'est-à-dire dans la mathématique enseignée à l'Université. Descartes va jusqu'à insérer des formules au sein même d'une phrase, indisposant les usagers de la langue claire qu'il manie si bien, ou encore dispose spatialement les expressions polynomiales pour respecter les opérations de multiplication des coefficients. On a eu tendance, autrefois, à considérer ces façons comme une naïveté, ou un début maladroit d'une algèbre qui cherchait sa forme, et on les a même supprimées de bien des rééditions. Le procédé, si on le prend à la façon d'une rhétorique, a des analogies à celui de Stendhal dans la *Vie de Henry Brulard*, qui insère toutes sortes de dessins remplaçant quelquefois l'écriture qui se dit même incapable de mieux. Est-ce cette intrusion d'un autre langage qui donne la raison pour laquelle l'ouvrage ne fut pas publié du vivant de Stendhal ? L'expression des quantités imaginaires ne manifeste-t-elle pas de même l'insuffisance d'une forme d'algèbre, donc aussi sa délimitation suivant le critère de l'emploi ou non des imaginaires ? On aura bien, au XX^e siècle, la constitution d'une algèbre réelle, mais il y eut

¹⁵On pourrait de même considérer comme un genre littéraire les ouvrages de *geometria practica*, les arithmétiques commerciales, mais aussi la *Prothomathesis* de Oronce Finé du premier tiers du XVI^e siècle. Dans la mesure, pour ce dernier ouvrage, où les sciences du *quadrivium* se trouvent réorganisées, avec apports nouveaux comme la cartographie et disparition de la musique, et où la nouvelle disponibilité par l'imprimerie créait *de facto* un nouveau curriculum, dispensant éventuellement des cours oraux de l'Université, s'adressant ainsi à un nouveau public.

¹⁶Jean et Nicole Dhombres, *Lazare Carnot*, Fayard, Paris, 1998, chap. XX.

au XVIII^e siècle une théorie réelle de l'élimination qui en avait l'allure et que nous n'apprécions plus guère. Au contraire, l'expression de quantité imaginaire exprime-t-elle la capacité de l'algèbre à s'étendre à des symboles "impossibles", qui en deviennent la marque distinctive ? Là s'effectue une démarcation très nette au cours des Lumières : il y a les auteurs qui emploient presque systématiquement l'expression de "quantités imaginaires", et ceux qui préfèrent celle des "quantités impossibles", où joue l'effet de paradoxe que nous avons largement retiré à l'expression de quantité imaginaire pour la faire apparaître comme une création. John Playfair en 1778, dans un assez long article, ne prononce pas une seule fois le mot "imaginaire". Il joue du paradoxe de l'impossibilité pour distinguer la géométrie, science sans controverse, de l'algèbre. On comprend la douloureuse surprise causée par les géométries non euclidiennes ! Mais restons avec Playfair qui énonce, sans gêne aucune, et si longtemps avant les auteurs réunis par Peter Dear, un effet épistémologique de distinction par la langue et je modernise un peu la traduction, pour mieux faire saisir le sens de l'original.

The cause of this diversity, in sciences which have the same object, must no doubt be sought for in the different modes which they employ to express our ideas.¹⁷

La raison de cette polysémie dans des sciences qui ont le même objet peut, sans doute aucun, être recherchée dans les différentes modalités que ces sciences utilisent pour exprimer nos idées.

Si l'affirmation littéraire de genres distincts établit des frontières, peut-être provisoires, entre les domaines mathématiques, elle permet paradoxalement d'attribuer une place à de nouveaux domaines comme l'algèbre et ses divisions. Les différents domaines en effet sont moins concernés les uns par les autres, mais alors ce sont les fonctions dévolues à ces domaines bien distingués qui deviennent l'objet de discours, introductifs ou conclusifs, largement organisés par du littéraire. Tout se passe alors, mais sur le plan rhétorique, comme si les mathématiciens avaient externalisé la rhétorique, l'avait mise textuellement au-delà des frontières du cœur mathématique qu'est la démonstration.¹⁸ Ce n'est encore pas un tel exemple que je veux donner avec l'étude des preuves de la factorisation réelle des polynômes au XVIII^e siècle, qui sont le biais par lequel les imaginaires furent domptées. Car c'est un travail interne que je veux lire dans ces preuves, dont le but était d'exprimer la nature des quantités imaginaires en en faisant disparaître le sens, sans que pour autant l'expression devenue rhétorique de quantités impossibles soit réintroduite. C'est cette rhétorique interne, si je peux me permettre, que je veux examiner dans quelques textes de la mathématique des Lumières.

A cette analyse des fonctions interne et externe de la classification en genres littéraires, il faut adjoindre les méthodes non moins littéraires de la réception des textes. Je veux tenir tout particulièrement compte du pouvoir de résolution accordé à certains textes mathématiques. Cette *auctoritas*, qui n'a pas grand chose à voir avec le nombre des ventes d'un ouvrage, donne un caractère de nécessité à la séparation des domaines

¹⁷John Playfair, On the Arithmetic of Impossible Quantities, *Phil. Trans. Royal Soc. London*, 68, 1738, pp. 318-343.

¹⁸La mise en parallèle de préfaces à des ouvrages scientifiques est un exercice littéraire particulièrement riche pour l'histoire des sciences et j'y ai consacré deux années de séminaires à l'Ecole des hautes études en sciences sociales.

mathématiques. On doit parler d'une rhétorique de l'autorité qui oriente l'histoire des mathématiques.¹⁹ J'entends l'analyser sur l'exemple de travaux sur la nature des quantités imaginaires. L'autorité ne consiste pas à réduire la nature des quantités imaginaires à une seule "impossibilité", celle d'un nombre dont le carré est négatif : $\sqrt{-1}$. On a certes lu la définition donnée par d'Alembert dans l'*Encyclopédie*. Le nombre complexe est cependant bien plus, non seulement une forme avec l'écriture $a + b\sqrt{-1}$ que l'on peut dire vectorielle car elle est basée sur une indépendance, mais un objet intervenant "naturellement" dans les fonctions de l'analyse. La langue enregistre ce succès, puisque les quantités imaginaires se disent comme les variables complexes, $a + b\sqrt{-1}$, lesquelles comprennent par l'écriture même les réels ($b = 0$), alors que longtemps les imaginaires les excluaient. L'expression de fonction de la variable imaginaire, ou de champ imaginaire, est la preuve d'une démarche très large, bien au-delà de la question algébrique à laquelle on réduit beaucoup trop les imaginaires.

J'ai choisi trois textes seulement pour évoquer les formes rhétoriques utilisées pour exprimer la nature des imaginaires lorsque le nom de "quantités imaginaires" était préféré. Le premier est un texte de Leonhard Euler, écrit en 1749, dont je veux manifester la rhétorique du doute. Il devient pourtant un texte d'autorité au sens que je viens de dire. Le deuxième texte publié dix ans plus tard est de Pierre-Marie-François Daviet de Foncenex, et je détermine au final le genre comme étant de critique académique. En dernier lieu, je donne un texte de Laplace de 1795, où la preuve fournie est convaincante aujourd'hui encore, convaincante aussi si l'on juge par le type de rigueur désigné par l'auteur lui-même.

1. La rhétorique de l'insuffisance de l'algèbre d'alors fait la nécessité des fonctions pour l'étude des quantités imaginaires.

Le mot "quantité" est bien mathématique, et il est venu remplacer au moment de l'algèbre en Europe l'antique vocabulaire de grandeur issu d'Euclide, alors que l'adjectif "imaginaire" est d'origine littéraire, et à peine philosophique, sinon par dérision.²⁰ Pourtant, c'est René Descartes qui utilise le premier en 1637, dans la *Géométrie*, l'expression de "racines imaginaires", et opposition est aussitôt faite aux "racines réelles". S'il tient à dire "qu'il n'y a quelquefois aucune quantité, qui corresponde à celles qu'on imagine", le pli fut bientôt pris de parler de "quantités réelles", qui est tout autant un oxymore pour la tradition mathématique que l'habitude qui devint celle des "quantités imaginaires". Descartes définit pourtant sans ambiguïté les quantités réelles comme rapports de longueurs géométriques, les dotant d'un signe pour les besoins des équations. Mais la "nature" des quantités imaginaires chez Descartes ne saurait être

¹⁹Ce type d'étude sur ce qui fait l'autorité, au besoin par la force de l'habitude, a été initialisé par Edward Grant, *Aristotelianism and the Longevity of the Medieval World View*, *History of Science*, 16, 1978, pp. 93-106.

²⁰L'immense littérature philosophique sur l'imaginaire et l'imagination, note toujours le peu d'estime pour cette notion chez les scolastiques ou à l'âge classique, et la nouveauté qu'ouvre l'*Encyclopédie* de Diderot, hissant l'imagination au niveau de la raison et de la mémoire parmi les facultés principales de l'entendement, mais la réduisant aussi à la seule poésie. Voir *Discours préliminaire de l'Encyclopédie*, éd. F. Picavet, Vrin reprise, Paris, 1984.

évoquée, puisque ces quantités sont des fictions en vue de l'algèbre.²¹ Elles sont destinées à permettre la factorisation de l'écriture de tout polynôme. C'est exactement ce qu'écrivait encore Leonhard Euler dans un article publié en 1751, utilisant le verbe "concevoir" en référence au verbe "imaginer" de Descartes.²² Il commence dans son titre par se restreindre au vocabulaire des "racines imaginaires", mais dès la deuxième page, il parle de "quantités imaginaires". La surprise est qu'il tient à les définir par l'absence d'ordre sur ces quantités. Elles sont des quantités qui n'ont pas de signe.²³ Signe est ici entendu au sens algébrique de + ou -, que j'écris bien sûr avec des signes, mais de façon rhétorique ces quantités sont sans écriture possible *a priori*. La forme complexe, au contraire, est une écriture, mais elle ne pourvoit pourtant pas un signe algébrique, et c'est pour cela qu'elle est dite "impossible". C'est le seul endroit du texte d'Euler où cet adjectif intervient.

On nomme quantité imaginaire, celle qui n'est ni plus grande que zéro, ni plus petite que zéro, ni égale à zéro; ce sera donc quelque chose d'impossible, comme par exemple $\sqrt{-1}$, ou en général $a + b\sqrt{-1}$; puisqu'une telle quantité n'est ni positive, ni négative, ni zéro.²⁴

Peut-être l'absence de signe signalée par Euler est-elle un critère d'erreur ! Ce serait une pierre de touche, un moyen de détruire *a priori* tout argument touchant des imaginaires qui évoquerait un signe. Nous allons surprendre Euler se trompant sur ce point même. Mais lisons Euler pour constater qu'il reste beaucoup de langage ordinaire autour de l'écriture algébrique.

Nous concevons donc, que de quelque degré que soit l'équation proposée
 $x^n + Ax^{n-1} + Bx^{n-2} + Cx^{n-3} + \dots + N = 0$,
 elle puisse toujours être représentée par une telle forme
 $(x + a)(x + \beta)(x + \gamma)(x + \delta)\dots(x + \nu)$,
 où le nombre de ces facteurs simples soit = n .²⁵

Les A, B, C , etc., sont des quantités réelles. Bien entendu, Euler ajoute des propriétés concernant les quantités imaginaires, que je préfère dire en plus algébriques, puisqu'il suppose seulement qu'on peut les multiplier et additionner, de sorte que l'on dispose des fameuses relations combinatoires nées avec l'algèbre moderne comme on les voit déjà chez François Viète à la fin du XVI^e siècle, qui n'hésite pas à parler de raisonnements élégants derrière cette belle observation.²⁶

²¹Descartes n'a rien contre le mot "nature", et son discours second dans la *Géométrie* est intitulé : "de la nature des courbes".

²²René Descartes, *La géométrie*, op. cit., p. 380.

²³Leonhard Euler, Recherches sur les racines imaginaires des équations, *Mém. Acad. Sc. Berlin*, 5, (1749), 1751, p. 222-288; *Leonhardi Euleri Opera Omnia*, I, 6, *Commentationes algebraicae*, pp. 78-147, p. 79. Cette référence sera notée : Euler, 1749, p. 79. Voir, Christian Gilain, Sur l'histoire du théorème fondamental de l'algèbre : théorie des équations et calcul intégral, *Arch. Hist. Ex. Sc.*, 42, n° 2, 1991, pp. 91-136.

²⁴Euler, 1749, p. 79.

²⁵Euler, 1749, p. 79.

²⁶Conclusion de *De emendatione Aequationum*, in *Vietae Opera Mathematica*, Leyden, 1646. On trouve une histoire des fonctions symétriques élémentaires dans Jackie Stedall, *The Great Invention of Algebra : Thomas Harriot's Treatise on Equation*, Oxford University Press, 2003. On notera qu'en prenant des facteurs de la forme $(x + a)$, Euler se débarrasse de signes à mettre alternativement devant les coefficients du

A=à la somme de ces quantités, $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \dots, \nu$,
 B=à la somme de tous leurs produits de deux à deux,
 C=à la somme de leurs produits de trois à trois,
 D=à la somme de leurs produits de quatre à quatre,
 et enfin
 N=au produit de toutes ensemble, $\alpha\beta\gamma\delta\dots\nu$.²⁷

Dans cette conception algébrique les quantités réelles sont des cas particuliers des quantités imaginaires, et il y a là un paradoxe logique, usuel en mathématiques. Il tient ici au maintien du mot “quantité” dans les quantités imaginaires. Cette position, une posture d’autorité cartésienne, restera immuable au XVIII^e siècle, sauf sa dernière année, avec la présentation de la thèse de Gauss. Si pour ces quantités imaginaires algébriques, Euler entend régler la question de leur nature, il évite pourtant cette terminologie. Le texte suivant l’illustre.

On dit donc que toute équation, ne pouvant être résolue en des facteurs simples réels, a toujours des facteurs réels du second degré. Cependant personne, à ce que je sache, n’a encore démontré assez rigoureusement la vérité de ce sentiment ; je tâcherai donc d’en donner une démonstration, qui ne soit assujettie à aucune exception.²⁸

Euler maintient la sémantique de l’algèbre des seuls polynômes, d’ailleurs appelés des équations, pour bien rappeler que l’on cherche des solutions “utiles” qui, *a priori*, ne sauraient s’avouer être des quantités imaginaires non réelles. Aussi, on ne lira d’abord que des “facteurs réels du second degré”, donc des imaginaires algébriques du second degré, ce que l’on va appeler des nombres complexes, mais qui pour Euler seront au final les imaginaires tout court. Cette façon sera suivie par une lignée de mathématiciens, qui presque tous ne pourront néanmoins éviter l’intervention des imaginaires dans les raisonnements, et d’imaginaires non réduits à la forme complexe. Gauss au final sera le premier à récuser cette “hypocrisie”.

Euler²⁹ en 1749 parle avec l’autorité d’un académicien des sciences exceptionnel qui lance apparemment un programme de recherche de factorisation polynomiale :³⁰ il fait référence à la tradition algébrique cartésienne, et la généralité est

polynôme pour exprimer les fonctions symétriques élémentaires. C’est qu’il prépare un rôle fonctionnel de ces coefficients, que trouvera Lagrange, comme on le dira plus loin en étudiant la démonstration de Laplace.

²⁷Euler, 1749, p. 80.

²⁸Euler, 1749, p. 81.

²⁹Comme si la production du penseur seule comptait, en dehors des remarques nombreuses il est vrai dans les *Opera Omnia*, il n’existe guère de biographies d’Euler, les éloges académiques du XVIII^e siècle paraissant suffire.

³⁰Depuis les travaux de Imre Lakatos, la notion de programme de recherche semble aller de soi, car elle focalise sur une méthode en vue d’une invention (*Histoire et méthodologie des sciences, programmes de recherche et reconstruction*, trad. fr. C. Malamoud, J.F. Spitz sous la dir. Luce Giard, PUF, Paris, 1994). Alors qu’elle manque selon moi d’épaisseur historique. La lui donner serait presque considérer un programme de recherche comme un genre littéraire, utilisé par un scientifique pour se placer face à ses pairs, mais aussi à ses patrons. En fait, me semble-t-il, l’intérêt d’un programme de recherche est d’installer dans la pratique mathématique, et en particulier dans la pratique d’écriture des mathématiques, cette part d’idées floues et néanmoins esquissées, une pulsion sans doute. Mais l’idée est assez différente alors de la dialectique des “proofs and refutations”. André Weil parle admirablement d’une “métaphysique” comme ensemble d’ana-

double. Il faut obtenir un résultat de factorisation pour tout polynôme ; il faut une démonstration sans exception. Si Euler cache pour le moment le fait que Jean d'Alembert ait fait un effort semblable au sien, d'ailleurs publié dans le même recueil académique que l'article d'Euler,³¹ une année plus tôt, c'est qu'il considère que le texte de d'Alembert ne relève pas du domaine de l'algèbre : "il a employé dans sa démonstration des quantités infiniment petites".³² Euler usera de même de l'emploi de quantités imaginaires comme signe d'un au-delà de l'algèbre vers lequel il entend entraîner son lecteur. Mais Euler a la ruse de dire qu'il n'a rien contre les quantités infiniment petites, et que son propos est seulement de séparation des méthodes et des genres. Ce n'est qu'une rhétorique pour montrer que la séparation des domaines est peu convaincante.

De fait, d'Alembert avait montré que toute imaginaire algébrique, "quelque compliquée qu'elle soit, est toujours réductible à la forme $M + N\sqrt{I}$ ".³³ D'Alembert était parvenu à une question de nature, et par $N = 0$, la nature de quantité réelle devenait plus généralement incluse dans celle des imaginaires. Alors qu'Euler reste d'abord dans la seule sémantique des polynômes, et de leurs factorisations, qui par le vocabulaire permet une distinction de nature entre imaginaires et réels. Autrement dit, et si l'on classe par les objets en cause, d'Alembert travaille avec une fonction polynomiale, donc avec une courbe qui dispose d'une réalité par elle-même, alors qu'Euler se cantonnerait à l'objet algébrique polynôme. C'est pour signifier cette division que j'ai adopté le langage des quantités imaginaires algébriques, mais je vais devoir justement m'en débarrasser bientôt.

En effet, on avait souvent étendu le geste ordonnateur de Descartes à d'autres objets que les polynômes, et perdant l'ordre, évoqué des quantités imaginaires aussi bien pour des expressions pouvant s'écrire par une formule, mais ne pouvant objectivement recevoir une signification directe, ainsi du logarithme des nombres négatifs, ou pour des expressions faciles à écrire en tant que signes, mais pour lesquels il restait à trouver un sens, comme une exponentielle complexe à base complexe :

$$(a + b\sqrt{-1})^{(c+d\sqrt{-1})}.$$

C'est finalement à propos des exponentielles qu'Euler fait comprendre le pourquoi de son article, et la structure qu'il lui donne. Il n'utilise pas la rhétorique du genre algébrique, mais celle de l'utilité. Il le fait sous la forme d'un dénigrement de l'algèbre polynomiale pure. La connaissance des imaginaires algébriques ne saurait "avoir aucune utilité"³⁴ en algèbre polynomiale considérée comme servant à la

logies vagues, mais voilà qu'il rompt avec la sémantique du "programme de recherche", puisqu'il avoue l'ennui qui survient une fois que le flou s'efface par l'écrit objectif de la théorie en jeu (André Weil, *De la métaphysique aux mathématiques, Œuvres scientifiques/Scientific Works*, Springer Verlag, New York, Heidelberg, Berlin, t. 2, p. 408).

³¹Jean d'Alembert, Recherches sur le calcul intégral, *Mémoires de l'Académie des sciences de Berlin*, 2 (1746), 1748.

³²Euler, 1749, p. 114.

³³Euler, 1749, p. 114.

³⁴Euler, 1749, p. 80.

géométrie, puisque les racines ainsi obtenues ne donnent pas de solution. Mais “l’Analyse des infinis” use de ces racines pour classer les intégrales des fractions rationnelles aboutissant à des “logarithmes imaginaires” que l’on sait réduire à des expressions réelles. Autant donc aborder directement ces quantités imaginaires, au moins celles qui proviennent des logarithmes et des exponentielles, bref des “opérations transcendantes”, ou au moins celles des transcendantes qui sont “connues”.

Or pour lever ce doute, je ferai voir que toutes les opérations transcendantes qui sont connues, n’écartent point les quantités imaginaires qu’elles produisent, de la forme marquée $(M + \sqrt{-1})$.³⁵

C’est donc dans ce que l’on peut voir comme la deuxième partie du texte d’Euler que le point de vue de d’Alembert est rejoint, et la restriction à la factorisation réelle du début, comme délimitation d’un genre algébrique, est un leurre. Pourquoi ne pas le voir plutôt comme forme rhétorique, qu’il serait facile de nommer dans le répertoire littéraire ? La question immédiate est celle de son utilité. Est-il voulu que la deuxième partie ne se comprenne que par le succès de la première, celle consacrée aux imaginaires algébriques, et à l’algèbre polynomiale ? Mais est-ce bien Euler qui dit le succès, ou le récit qu’en donnent les historiens des mathématiques ? Pourquoi ne pas comprendre que le relatif insuccès de la première partie, aux yeux d’Euler lui-même, est la cause de l’existence de la seconde ? Euler pourrait-il ne pas être fidèle à son manuel de publication très récente, l’*Introductio in analysin infinitorum* sorti à Lausanne en 1748, où il n’est pas fait de différence de traitement, ni donc de nature, entre les fonctions algébriques et les fonctions transcendantes, connues ou à connaître. Autre point de vue encore, la division en deux parties de son article par Euler ne signifie-t-elle pas que l’algèbre “finie”, celle des polynômes, a une autonomie de méthode ?

Je crois que ce serait parler un peu trop vite, et le discours de Leonhard Euler offre des subtilités que la forme rhétorique utilisée permet de déceler. Car je ne lis pas Euler contre Euler, pour le débusquer, mais en prenant au sérieux ses moyens d’exposition. Autant la deuxième partie du texte du Bâlois est annoncée avec autorité comme sûre (“je ferai voir”), autant la première partie reste un programme (“je tâcherai donc d’en donner une démonstration”). En sorte que l’Analyse des infinis apparaît plus facile que l’algèbre des quantités finies. C’est que les problèmes ne sont pas les mêmes. Avec l’analyse des infinis, on règle la nature des opérations transcendantes, c’est-à-dire que l’on s’intéresse aux fonctions et aux objets imaginaires qu’elles créent automatiquement. D’où la généralité de la conclusion :

Nous pouvons soutenir sans balancer, que généralement toutes les quantités imaginaires, quelque compliquées qu’elles puissent être, sont toujours réductibles à la forme

$$M + N\sqrt{-1}.$$
⁹

La question de la nature des imaginaires est donc posée de façon générale. Qu’est-ce qu’une quantité imaginaire en général, sinon le résultat d’une expression fonctionnelle appliquée à une variable. Si l’on reste avec l’algèbre polynomiale, il y a des difficultés, donc nécessité d’un plus grand déploiement d’astuce mathématique, parce que

³⁵Euler, 1749, pp. 121-122.

⁹Euler, 1749, p. 147.

l'on ne peut exprimer algébriquement la dépendance des quantités imaginaires dites algébriques à partir des coefficients du polynôme qui les fait naître comme racines. Euler ne doute pas qu'il y ait en cause des fonctions, mais leur expression analytique est inabordable. Il tentera néanmoins une preuve "fonctionnelle" de la forme générale des imaginaires algébriques dans la seconde partie ("il est pourtant certain que cette formule sera composée de plusieurs signes radicaux", et il les compose tous pour maintenir la stabilité dans le champ des complexes³⁶). Cette démonstration d'Euler nous inquiète encore aujourd'hui. La méthode fonctionnelle a pu conduire à des désastres.³⁷ L'autorité du texte d'Euler ne tient-il pas précisément au fait qu'il sait tenir la corde assez raide, tout en restant suggestif dans la partie la plus algébrique ? Mais si la forme donnée à une fonction est celle d'une série entière, la méthode fonctionnelle est gouvernable, et en particulier il y a stabilité de l'opération "fonction" dans ce que nous appelons le champ complexe, qui est ouvert par l'autorité d'Euler grâce à l'énoncé précédent. On dira que cette autorité doit se mesurer aussi par les citations de son œuvre, et sa postérité : les histoires des mathématiques l'attestent pour le temps des Lumières, puis manifestent une remise en doute pour la période d'après, pas autrement caractérisée sinon par l'expression bizarre de temps de la rigueur qui correspondrait au positivisme si l'on est philosophe ou au romantisme si l'on est littéraire. La citation d'Euler la plus fréquente est sa formule écrite dans l'*Introductio* qui donne le sens d'une fonction exponentielle imaginaire ($e^{i\theta} = \cos \theta + \sqrt{-1} \sin \theta$). C'est cette formule qui fait passer l'imaginaire algébrique en analyse des fonctions. On comprend que ceci bloque Condillac, pour lequel, selon la remarquable description qu'en fait Ernst Cassirer, "l'esprit ne crée rien, n'invente rien ; il répète et combine". Dans tout cela l'esprit n'a affaire qu'à lui-même et à ses "simples idées".³⁸ Je mets au défi de montrer que l'exponentielle imaginaire, et je garde volontiers le vocabulaire d'Euler, soit une "combinaison".

La technique d'Euler, dans la première partie, déploie certes des effets algébriques de factorisation et exploite la méthode cartésienne des indéterminées, mais elle est fondamentalement et comme nécessairement passage à la fonction polynôme et on retient surtout le mot "fonction". A ce titre, l'étude des signes, positif ou négatif, devient majeure. C'est alors dans l'étude d'un signe qu'Euler commet une erreur. Cette erreur, qui est une confusion entre le signe moins et la négativité,³⁹ n'est-elle pas comme annoncée par la précaution d'Euler de ne pas évoquer de signe dès lors que des imaginaires sont en cause ? La construction du texte d'Euler paraît bien plus compliquée qu'une simple division en deux parties, avec des retours constants à l'algèbre des

³⁶Euler, 1749, p. 120.

³⁷Jean Dhombres, Quelques aspects des équations fonctionnelles liés à l'évolution du concept de fonction, *Arch. Hist. Exact Sciences*, vol. 36, n° 2, 1986, pp. 91-181 ; Jean Dhombres, Un texte d'Euler sur les fonctions continues et discontinues, véritable programme de l'analyse au XVIII^e siècle, *Cahier du Séminaire d'histoire des mathématiques*, 1987, t. 7, pp. 35-115 avec la trad. fr. de Leonhard Euler, De usu functionum discontinuarum in *Analysi, Novi Comm. Acad. Sc. Petrop.*, 11, 1765, pp. 3-27 ; Jean Dhombres, Michel Pensivy, Esprit de rigueur et présentation mathématique au XVIII^e siècle : le cas d'une démonstration d'Aepinus, *Hist. Math.*, 115, 1987, pp. 9-31 ; G. Ferraro, Functions, functional relations and the laws of continuity in Euler, *Hist. Math.*, 27, 2000, pp. 107-132.

³⁸Ernst Cassirer, *La philosophie des Lumières*, trad. fr. Pierre Quillet, Fayard, Paris, 1966, p. 58.

³⁹Voir André-Jean Glière, *Les nombres négatifs depuis d'Alembert*, thèse, EHESS, à soutenir, 2007.

polynômes, et comme un jeu d'exemples.⁴⁰ Nous verrons mieux l'erreur parce qu'elle est qualifiée dans un autre article qui permet la délimitation d'un autre genre littéraire, le genre académique.

Le titre choisi par Euler est donc trompeur si l'on en juge par cette orientation finale : "recherches sur les racines imaginaires des équations". L'algèbre polynomiale est bien dépassée, les réels sont inclus dans les imaginaires, et ceux-ci, pas seulement les imaginaires algébriques, ont la forme des complexes. Cette orientation fit autorité. Les raisonnements d'Euler sur les opérations successives sur une fonction font pourtant partie de ce que j'ai qualifié, à l'occasion de ses démonstrations de la formule du binôme de Newton, de préjugé fonctionnel.⁴¹ C'est celui-ci, et non l'orientation vers les fonctions, qui est donc soumis à critique, et puisque le travail d'Euler a été publié à l'Académie des sciences et belles lettres de Berlin, c'est à la très jeune Académie des sciences de Turin qu'une réponse fut donnée une dizaine d'années plus tard.

2. Le genre académique et la tentation scolastique

On rencontre si souvent des quantités imaginaires dans les expressions algébriques qu'il seroit à souhaiter qu'on se fut attaché à en examiner avec plus de soin la nature et l'origine.⁴²

Ainsi débute un article publié aux Commentaires de l'Académie de Turin en 1759 et en son premier numéro, par le chevalier Daviet de Foncenex, sujet piémontais né à Thonon. La tournure de cette introduction, avec l'emploi d'un conditionnel, assène l'insouciance épistémologique des savants précédents. Mais c'est pour mieux préparer la

⁴⁰Il convient maintenant de donner les lignes de structure de cet article d'Euler en 124 numéros. Au début il n'y a que des équations polynomiales de degrés en puissances de 2 successives car il s'agit de diviser ces équations en deux parties, et l'ordre du calcul conduit à l'énoncé du numéro 49 : la résolution de tout tel polynôme réel en facteurs réels du premier ou du deuxième degré. Mais il est suivi d'une étude de l'équation de degré 6, qui n'est pas une puissance de 2, et pourtant un cas particulier sans importance notable puisque le théorème dès qu'il est prouvé pour un certain degré, l'est pour les degrés inférieurs. Une autre méthode est inventée, et ce sera celle reprise par de Foncenex, avec l'étude directe des facteurs réels du second degré dans un polynôme. Dix numéros exploitent cette piste, et si Euler s'excuse de cette redondance, c'est qu'il pourrait y avoir doute sur la généralité de la première méthode. Obtenir autrement le conforte, même si cet autrement est aussi sujet à doute. Au numéro 60, le passage est fait du théorème à la forme des imaginaires en $M + N\sqrt{-1}$, et tout aussitôt la réciproque est envisagée. Si l'on dispose en effet de la forme des imaginaires, le théorème du numéro 49 est acquis. D'où une nouvelle piste portant sur les complexes, qui sont montrés comme constituant un corps, et dont on peut prendre des racines de tous les ordres entiers. Ce qui, par revirement, induit au numéro 76, une "nouvelle démonstration" du théorème du numéro 49, en considérant que toutes les racines imaginaires se réduisent à des extractions de racines successives portant sur les coefficients. Le numéro suivant est une tout autre démonstration, par récurrence, à partir d'une forme *a priori* des racines d'un polynôme de degré n comme sommes de racines n -èmes des racines d'un polynôme de degré $n - 1$. Au numéro suivant, le numéro 78, le passage est effectué de la première partie à la seconde, puisque l'on passe de l'algèbre au transcendant des fonctions logarithmes ou trigonométriques, et jusque dans les méthodes puisque le calcul différentiel est sollicité : les valeurs de ces fonctions sont montrées complexes. La fin de l'article n'est qu'une longue exploitation de ce résultat.

⁴¹Jean Dhombres, Les préjugés d'Euler dans l'emploi de la méthode fonctionnelle, *Revue d'Histoire des sciences*, XL/2, 1987, pp. 179-202.

⁴²Daviet de Foncenex, Réflexions sur les quantités imaginaires, *Miscellanea philosophico-Mathematica Societatis Privatae Taurinensis*, t. 1, 1759, pp. 113-146, p. 113. Cet article sera désormais référencé par Foncenex, 1759.

correction de l'auteur, qui n'en convient pas moins qu'une histoire doit être repensée, et l'origine de ces quantités rectifiée. Ce n'est pas la *tabula rasa* sur les imaginaires, mais une rectification. L'auteur, âgé d'un peu plus de vingt cinq ans, poursuit au conditionnel sur le thème du règlement des controverses : il suggère qu'une bonne analyse des questions en cause les aurait évitées. Il n'emploie pas le mot "algèbre" pour délimiter son sujet, et fixer le lieu de la controverse sur les symboles dont le sens n'est pas évident. Il use d'une expression bien plus intéressante, celle d'un "calcul", pour suggérer moins un domaine qu'une façon de faire des mathématiques.

Ces recherches auroient été d'un grand secours dans toutes les parties des mathématiques qu'on traite par le calcul, & on auroit évité par là beaucoup de paradoxes, & de contradictions dans une Science qui en devoit être entièrement exempte.⁴³

Le conditionnel final, une jolie clause rhétorique, impose une critique des thèses mathématiques précédentes, et appelle aussi l'inscription dans une lignée. Bientôt, l'article "Equation" de l'*Encyclopédie*, signé d'Alembert, "où l'on trouvera des réflexions neuves et intéressantes", est dûment écarté, "matière étrangère à mon sujet". Mais quelques pages plus loin apparaît le nom d'Euler, qui a produit une "excellente pièce... sur cette matière dans les Mémoires de l'Académie royale de Prusse de l'année 1749".⁴⁴ Le travail d'Euler portait, nous l'avons vu, au-delà des imaginaires algébriques, et Daviet de Foncenex vise aussi bien un "calcul". Effectivement, presque au final de cet article d'une trentaine de pages, où l'on aura beaucoup parlé du logarithme des nombres négatifs, il est constaté que les "formules algébriques", et il faut entendre seulement le calcul, "appliquées à des cas qu'elles ne peuvent exprimer rendent imaginaires & absurdes des expressions qui doivent être réelles par la nature même du problème" qui les a convoquées. Le lien de l'absurde à l'imaginaire semble décourager, mais c'est un effet de langue. Puisqu'est corrigible

cet inconvénient dans l'algèbre qu'on ne puisse pas toujours trouver des formules générales qui puissent s'appliquer à toutes les circonstances de la question, mais il sera toujours aisé de reconnaître les cas qui ne peuvent être exprimés par ces équations, & on pourra les corriger par un procédé semblable à celui, dont je me suis servi.⁴⁵

A ce moment du texte apparaît le nom de Lagrange, puissance tutélaire à Turin, et pourtant de deux ans le cadet de Daviet de Foncenex. Lagrange signe Louis de Lagrange une longue note en théorie de la gravitation, portant sur un aspect "absurde et contradictoire" du calcul intégral, la valeur différente dira-t-on bientôt du laplacien, selon que l'on se trouve à l'intérieur d'une masse sphérique, sur son bord, ou à l'extérieur. La conclusion de Lagrange va excellemment dans le sens du calcul comme justificatif des paradoxes.

Au reste, les Géomètres ne sont plus étrangers à ces sortes de paradoxe, si on peut les nommer ainsi. (Car je n'y vois que des conséquences toutes naturelles des suppositions qu'on

⁴³Foncenex, 1759, p. 113.

⁴⁴Foncenex, 1759, p. 116.

⁴⁵Foncenex, 1759, p. 143. J'ai seulement corrigé deux verbes, car il est écrit "puissent" en premier, mais c'est sans doute une interversion lors de la correction des épreuves avec le "puisse" qui vient une ligne après.

a fait (sic) dans le calcul).⁴⁶

Dernier feu, l'article de Daviet de Foncenex termine ce qu'il désigne à l'instar de son titre comme des "réflexions", par la démonstration simple de stabilité dans les complexes de l'exponentielle complexe, que d'Alembert et Euler avaient déjà fournie. Le procédé analytique utilisé fait l'analyse des fonctions.

Ainsi le compte rendu littéraire de cet article de Foncenex le range dans le genre de l'article académique, nouveau genre savant né avec les Académies des sciences de Londres et de Paris dans le dernier tiers du XVII^e siècle, avec une affiliation affirmée d'une lignée d'auteurs vivants dûment référencés, des jugements très nets sur d'autres, et un professionnalisme sans faute. Cet article a été lu par un censeur, et sans doute corrigé pour qu'il suive la bonne norme académique. Ce censeur est sans aucun doute Lagrange, dont nous venons de voir l'intervention. Le respect des influences est si grand dans cet article que l'auteur fait mention d'un texte datant du 1748, de R.P. Le Seur, professeur au Collège Romain et éditeur commentateur avec Jacquier des *Principia* de Newton. C'est que les propriétés combinatoires, mises en jeu chez Euler, sont déjà effectivement présentes chez Le Seur.⁴⁷ Le commentaire de Daviet de Foncenex est que l'on y trouve "d'ailleurs une excellente conduite des calculs".⁴⁸ Effet de rhétorique, cet environnement permet à l'auteur d'assurer qu'il s'occupe d'une affaire importante et d'un "théorème fameux".⁴⁹ N'est-ce pas aussi se prémunir contre une accusation de travailler sur des objets, les imaginaires, qui n'ont pas droit de cité en véritable algèbre ? C'est aussi la raison pour laquelle l'auteur parle sur un ton d'égalité. Voilà l'effet de la liberté académique, alors même que Foncenex n'est pas académicien, mais cadet de l'Ecole d'Artillerie de Turin. Ce titre ne figure pas dans l'ouvrage académique. Un peu médusés, des lecteurs français penseront que le nom de Foncenex n'était qu'un pseudonyme utilisé par Lagrange selon une des vieilles astuces de la république des Lettres.

Pourtant sur certains aspects, cet article correspond mieux aux usages de l'Université qu'à ceux de l'Académie, et quelque chose dans le ton littéraire diffère de l'article d'Euler. Certes, selon l'ordre académique qui est d'abord professionnel, l'article est technique, illisible par un non mathématicien. Mais la prétention en est éminemment philosophique, au sens d'une philosophie des mathématiques, et il faut aussi tenir compte du nom du recueil qui reçoit l'article : *Miscellanea philosophico-Mathematica*. La philosophie n'avait pas à proprement parler sa place, du moins à l'Académie des sciences de Paris. En fait preuve l'argumentaire suivant, car il est écrit dans un style dogmatique, quasiment comme un syllogisme à partir d'une "nature" *a priori* dont on pensait par l'introduction de l'article qu'il s'agissait pourtant de la définir sur de nouvelles bases.

Si l'on réfléchit sur la nature des racines imaginaires, qui comme on sait impliquent contradiction entre les données, on concevra évidemment qu'elles ne doivent point avoir de

⁴⁶Foncenex, 1759, p. 144, note.

⁴⁷Thomas Le Seur, *Mémoire sur le calcul intégral*, Rome, Ed. Pagliarini, 1748.

⁴⁸Foncenex, 1759, p. 122.

⁴⁹Foncenex, 1759, p. 115.

construction Géométrique possible, puisqu'il n'est point de manière de les considérer, qui lève la contradiction qui se trouve entre les données immuables par elles-mêmes.⁵⁰

A Paris, une dizaine d'années plus tôt, on avait lu sous la signature de Buffon des phrases de ce genre, à propos d'algèbre, faisant appel à des arguments "métaphysiques" sur la nature indivisible d'une loi de la nature. La métaphysique en jeu pourrait mieux se dire scolastique, et peut-être la qualification "universitaire" vaudrait tout autant. Ce fut effectivement une exception à l'Académie de Paris, et le secrétaire perpétuel publia quelques pages, parce qu'il y avait eu une vive et courte querelle avec Clairaut, et que celui-ci ridiculisait les arguments de Buffon. Le plus notable est que Clairaut les excluait comme arguments scolastiques, irrecevables dans l'enceinte académique.⁵¹

Le ridicule du dogmatisme de Foncenex sera manifestement bien plus difficile à surgir, et le livre de Jean-Robert Argand de 1806, qui réussit à représenter géométriquement les complexes, et en déduire la réduction des imaginaires algébriques aux nombres complexes, n'aura aucun impact académique. C'est un autre milieu qui le prendra en charge, le milieu des enseignants de mathématiques, dans leur nouveau rôle devenu important dans la formation puisque dans les lycées le latin venant d'être mis en équivalence aux mathématiques. De sorte qu'un autre genre littéraire se crée, non pas la poursuite du genre du manuel, mais le guide du professeur. Il y aura donc un mélange de formalismes didactiques et de variantes, de propositions curieuses, mais aussi de discussions sur les équilibres à tenir dans les classes entre les domaines, l'analyse se cherchant une place en filiation de l'algèbre, la géométrie se divisant en divers secteurs, selon le recours ou non fait à l'algèbre et à l'analyse, etc..⁵² Ces discussions ne pouvaient apparaître dans les manuels à proprement parler, car ceux-ci étaient destinés aux élèves, et on ne pouvait laisser percer ainsi des doutes. Il s'agit donc d'une autre histoire, qui pourrait bien être dite par une étude un peu fine du vocabulaire des articles d'Argand. Il invente le mot "module", qui va rester pour les quantités imaginaires qui deviennent seulement des nombres complexes, et tout le mouvement de l'article d'Euler est anéanti. Mais à faire cette analyse, nous quitterions le temps des Lumières pour celui de la Révolution et de ses suites, où un nouveau rôle pour le savant est établi, et donc une rhétorique toute différente de l'utilité, notamment professorale.

Revenons donc à Foncenex, dont la forme figée par le dogmatisme pour les constructions géométriques avec les quantités imaginaires, peut provenir d'une lecture trop sérieuse de la rhétorique de l'utilité qu'Euler avait esquissée pour justifier le passage de la première partie de son article à la seconde. C'était le passage des

⁵⁰Foncenex, 1759, p. 122. J'ai laissé l'orthographe impossible, "entres", façon de signaler que l'on ne peut pas trop chercher à tirer parti de subtilités de langage.

⁵¹Le piquant de l'histoire, et cela met assez à mal l'opposition que les historiens font entre cartésiens algébristes et newtoniens de la nouvelle philosophie naturelle, est que Buffon voulait défendre le dogme de l'attraction newtonienne, contre la proposition de Clairaut d'une loi seulement approchée (Jean Dhombres, *The mathematics implied in the laws of nature and realism, or the role of functions around 1750*, in Paolo Cerrai, Paolo Freguglia, Claudio Pellegrini (ed), *The Application of Mathematics to the Science of Nature. Critical moments and Aspects*, Kluwer Academic, 2002, pp. 207-222).

⁵²Jean Dhombres, Mario H. Otero, *Les Annales de mathématiques pures et appliquées*, le journal d'un homme seul au profit d'une communauté enseignante, in E. Ausejo, M. Hormigón, *Messengers of Mathematics*, Madrid, 1993, pp. 1-53.

imaginaires algébriques aux imaginaires générales, passage qui conduisait toutefois à une réduction drastique de toutes les imaginaires aux seuls nombres complexes, et donc à un dénigrement d'une spécificité de traitement des fonctions algébriques sur les fonctions transcendentes, entendues comme fonctions générales résumant l'idée de dépendance sous l'expression analytique.⁵³ Mais la scolastique de Daviet de Foncenex sur ce point était peut-être le gage donné pour qu'il s'accompagne d'une critique épistémologique sérieuse, sinon radicale, du travail d'Euler. En effet, en faisant passer ce qui restait d'impossible dans la notion d'imaginaire à l'impossibilité d'une construction géométrique, de Foncenex est libéré de la preuve d'Euler elle-même, restant bien sous son autorité quant à l'orientation de la recherche des valeurs imaginaires des fonctions en général. Le procédé rhétorique est alors très fort, particulièrement favorisé par un langage policé de la civilité académique⁵⁴ puisque la démonstration de l'impasse de la voie qui est choisie par Euler, justifie l'utilité d'une démonstration sur la nature des quantités imaginaires sur une tout autre base.

Cette circonstance, sans laquelle le théorème ci-dessus perd toute sa force, me paroît assés difficile à démontrer [...] la difficulté que j'ai trouvé à les déduire généralement des coefficients de l'équation proposée m'a fait abandonner cette recherche, pour examiner si indépendamment des Principes que Mr Euler avoit déjà établi, on ne pourroit point démontrer la proposition en question.⁵⁵

Il devient alors difficile de soutenir cette constante de l'historiographie classique sur les mathématiques du temps des Lumières dépourvues d'interrogations épistémologiques et entraînés par un allant analytique inventif, qui ne serait stabilisé que par le rigorisme d'esprits d'abord isolés comme Cauchy au début du XIX^e siècle. Heureusement, des études plus récentes établissent le sens philosophique que bien des mathématiciens des Lumières donnent à leur travail, notamment Lagrange, dont il n'est pas inutile de dire à nouveau qu'il est celui qui a introduit l'article de Foncenex à l'Académie de Turin,⁵⁶ mais aussi bien Euler dont l'autorité est du même ordre. Examinons la forme de la critique d'Euler par de Foncenex, en remarquant d'emblée qu'elle tient en deux

⁵³Jean Dhombres, Une conception architecturale de mathématiques : la séparation des variables chez Pfaff, in Patricia Radelet-de Grave, Edoardo Benvenuto (éd.), *Between Mathematics and Architecture*, Birkhäuser, Basel, 1995, pp. 178-203 ; Christian Gilain, *op.cit.*, note 23 ; Judith Grabiner, *The Origins of Cauchy's Rigorous Calculus*, MIT Press, Cambridge, 1981.

⁵⁴Un langage direct consisterait à dire : le théorème de Mr. Euler est faux. Ce langage direct peut être tenu dans une Académie, notamment dans les rapports officiels sur les documents adressés à l'Académie, et on l'a vu à propos de la querelle Buffon-Clairaut. Mais il s'agit ici d'algèbre problématique, et Euler lui-même a rédigé son article de façon à laisser voir ses doutes. Ceci dit, soixante dix ans plus tard, Abel se contentera de dire qu'un théorème faux de Cauchy "souffre d'une exception". La "civilité académique" a fait l'objet de nombreuses études, aussi bien pour la Royal Society que pour l'Académie des sciences de Paris, mais il n'y a pas eu d'études littéraires sur les formes écrites de cette civilité, la préférence ayant été donnée aux éloges qui forment un genre particulier, mais particulièrement stable dans l'histoire de l'Académie.

⁵⁵Foncenex, 1759, p. 118. J'omets des "sic" dans cette citation.

⁵⁶Une biographie de Lagrange peut être consultée dans le *Dictionary of Scientific Biography* ; Craig Fraser, Joseph-Louis Lagrange algebraic vision of the Calculus, *Hist. Math.*, 14, 1987, pp. 38-53 ; Christian Houzel, Jean-Louis Ovaert, Pierre Raymond, Jean-Louis Sansuc, *Philosophie et calcul de l'infini*, Paris, Maspero, 1976 ; Marco Panza, *La forma della quantità. Analisi algebrica e analisi superiore : il problema dell'unità della matematica dell'illuminismo*, Cahier d'Histoire et de Philosophie des sciences, Paris, 1992, n° 38-39.

courtes pages,⁵⁷ alors que dans son article, de Foncenex s'étend longuement et avec mollesse sur le logarithme des quantités négatives. Se dégage de ces deux seules pages un genre particulier d'écriture des mathématiques, une exhibition épistémologique au sein des mathématiques. Il s'agit néanmoins de dire ce qui est véritablement en jeu.

3. Rendre compte de la difficulté de s'élever au-dessus des calculs

D'abord, et c'est un acte ostentatoire, de Foncenex résume ce qu'Euler a fait, en reprenant son vocabulaire, et en introduisant seulement quelques mots pour souligner les points cruciaux qui seront ensuite critiqués. Euler a établi, à partir des racines imaginaires d'un polynôme unitaire⁵⁸ P de degré 2^n , dont il s'agit de montrer qu'il est factorisable, une équation polynomiale en u . Il convient de montrer qu'elle a des racines réels. La factorisation est en deux polynômes de degré 2^{n-1} , écrits avec des coefficients indéterminés en nombre $2^n - 1$. Il s'agit de les calculer tous à partir de l'un seul d'entre eux, noté u . Le dernier terme du polynôme en u ordonné par puissances décroissantes est un produit en nombre impair d'expressions de la forme $-p^2$, où p désigne une racine imaginaire. Appelons le a , écrit donc sous la forme $a = -p^2 p'^2 p''^2 \dots$. L'imparité provient d'un calcul combinatoire sur le nombre de combinaisons possibles de 2^{n-1} éléments choisis parmi 2^n , qui est le produit de 2 par un nombre impair k , selon la démonstration indiscutable et facile fournie par Euler.⁵⁹ Et le degré de l'équation en u est établi comme étant aussi $2k$, de sorte que le nombre de racines p, p', p'', \dots , en général distinctes, soit l'impair k , qui explique le signe moins dans l'expression⁶⁰ de a , puisque l'on a aussi les racines $-p, -p', -p'', \dots$, etc. Le but du calcul, ou plutôt de l'exhibition d'une forme pour les coefficients, est de montrer qu'il y a au moins une racine réelle pour le polynôme en u . Ce qui est facile à établir dès lors que le coefficient a est prouvé négatif, puisque le degré du polynôme unitaire en u est pair, $2k$, ce qui *a priori* donne au moins deux racines réelles.⁶¹ De Foncenex ajoutant sur Euler, un peu par exhibition de sa compréhension du maître, explique que le polynôme en u contient seulement des puissances paires de u .⁶² Euler "prouve" la négativité de a en inspectant sa forme : un signe moins devant un produit de carrés : "Par conséquent le dernier terme de l'équation pour u sera un carré négatif"⁶³ écrit Euler, que retranscrit exactement Daviet de Foncenex. Qui réagit :

⁵⁷Ce sont les pages 116 et 117 de Foncenex, 1759.

⁵⁸Convenons que le polynôme est dit unitaire lorsque son coefficient de plus haut degré est 1.

⁵⁹Euler, 1749, p. 106.

⁶⁰De Foncenex, pour s'expliquer, a la malencontreuse idée d'appeler un p une racine "positive", alors qu'il s'agit de quantités imaginaires dont Euler a pris le soin de dire que ce qui les caractérisait était de n'avoir pas de signe. La valeur de k dépasse le degré du polynôme P , mais le nouveau polynôme a des propriétés particulières.

⁶¹Euler a posé comme théorème fondamental dans son article qu'un polynôme de degré pair et dont le coefficient du terme constant est négatif possédait deux racines réelles au moins, ce que nous interprétons aujourd'hui par le théorème des valeurs intermédiaires.

⁶²Mais il y a une malheureuse faute d'impression ici, et il est écrit impair au lieu de pair (Foncenex, 1759, p. 117).

⁶³Euler, 1749, p. 106.

Mais puisque $p, p', p'', p''', \&$. sont les racines de l'équation dont quelques unes peuvent être imaginaires, & avoir un carré négatif, on ne peut pas conclure de ce que les facteurs $u^2 - p^2$ sont en nombre impair, que le dernier terme de leur produit soit essentiellement négatif.⁶⁴

Et il va plus loin, montrant que la démonstration de cette négativité exigerait d'établir que le produit des p soit réel. Or c'est ce que Euler lui-même avait vu, mais de Foncenex ajoute à propos du coefficient a :

Mr Euler le trouve en effet tel pour les équations du quatrième degré, mais pour les autres cas il se contente de dire que de produit étant déterminable par les coefficients C, D, E [*ce sont ceux, réels, du polynôme P*], il ne peut être imaginaire.⁶⁵

Et vient l'estocade, imparable, car faisant état d'une insuffisance dans l'ordre même des fonctions qui fait le sens de l'article d'Euler comme nous l'avons vu, et comme de Foncenex l'a bien compris.

On sent bien qu'il faudrait encore qu'on fut assuré qu'il est égal à une fonction rationnelle de ces coefficients.⁶⁶

L'expression "fonction rationnelle" est effectivement utilisée par Euler, non dans la démonstration générale, mais dans le cas d'une équation de degré 16, pour laquelle le degré de l'équation en u devient de façon impressionnante 12 870, le nombre k en étant la moitié.

Posant donc pqr etc. = P [*Foncenex notait $pp'p''p'''p''''$*], il est certain que P est déterminable par les coefficients B, C, D, E etc., en sorte qu'il en est une fonction rationnelle, et partant réelle.⁶⁷

Euler est piégé par sa méthode même d'exposé. Il traite en effet longuement des cas particuliers, comme s'il s'agissait d'une récurrence, mais abandonne les calculs effectifs (en l'occurrence les seuls calculs faits le sont pour l'équation du quatrième degré) au profit d'une considération plus générale, ici le caractère "déterminable". Et le préjugé fonctionnel est que le déterminable donne une fonction "rationnelle", un polynôme donc selon Euler, prenant dès lors des valeurs réelles. De Foncenex rate d'autant moins Euler que la question du "déterminable" avait déjà été signalée comme faisant partie de la méthode même de factorisation du polynôme P . C'était lorsqu'il s'agissait de montrer que u étant réel, on pouvait en déduire que tous les autres coefficients indéterminés introduits étaient réels. Foncenex écrivait :

Toutes les lettres α, β, μ, ν &. se pourront déterminer par les connues B, C, D & mêlées avec l'indéterminée u , réellement sans extraction de racine.⁶⁸

Cette fois l'expression "réellement sans extraction de racine" équivaut comme une sorte de précision à "fonction rationnelle", qui signifie normalement une fonction polynomiale. Et Euler emploie encore cette expression lors du traitement du cas de

⁶⁴Foncenex, 1759, p. 117.

⁶⁵*Idem.*

⁶⁶*Idem.*

⁶⁷Euler, 1749, p. 103.

⁶⁸Foncenex, 1759, p. 116.

l'équation du huitième degré, mais utilise la rhétorique de l'autorité aussi vieille que l'académisme ("comme on sait").

De ces égalités, on éliminera successivement les lettres $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \zeta$, ce qui se pourra faire, comme on sait, sans qu'on ait besoin d'aucune extraction de racine, de sorte que les valeurs de ces lettres seront toutes exprimées réellement par les quantités connues B, C, D, E, F, G, H et l'inconnue u .⁶⁹

Or dans ce cas, le caractère déterminable paraît justifié par un mauvais argument heuristique dont l'algèbre de la théorie de l'élimination cherchait à se débarrasser. En effet, le nombre des inconnues (les coefficients indéterminés) est égal au nombre des équations qui les lient.⁷⁰ Sans explication sur la forme des équations, cette conclusion est inacceptable. Or Euler la donne, non pas dans le cas général, mais à l'occasion du traitement de l'équation de degré 16, qui n'est évidemment pas l'objet d'un calcul proprement mené :

On obtiendra 15 égalités, desquelles il faut chercher les valeurs des coefficients u, a, b, g, d , etc., dont le nombre est aussi = 15, de sorte que c'est un problème déterminé.⁷¹

De Foncenex ne mentionne même pas les remarques d'Euler par lesquelles il se justifie quand même, ayant bien vu que, dès l'équation du huitième degré, les coefficients indéterminés sont liés par des relations faisant intervenir des puissances. De sorte que l'on doit de fait extraire des racines, et la stabilité dans les réels n'est plus assurée. Euler le sait qui indique :

il pourroit arriver que quelques uns renfermeroient des quantités irrationnelles, qui pourroient devenir imaginaires.⁷²

La critique de Gauss en 1799 sera imparable sur cette dernière tentative d'Euler de sauver son point de vue, mais non sa terminologie, par une expression formelle des racines.⁷³ Nous avons suffisamment insisté sur le fait qu'Euler lui-même donne à voir ses difficultés, et que le ton de son article est qu'il n'estime pas avoir vraiment résolu le cadre algébrique.

Retenons de la critique d'Euler par Foncenex le fait qu'il est difficile de se placer au-dessus des calculs, d'en prévoir l'issue sans avoir à les effectuer. Or c'est Euler qui prétendait pouvoir faire découvrir "par le seul raisonnement" les faits dont on a besoin, sans tout calculer. Mais son expression est bien plus un espoir qu'une réalité, puisqu'il dit tenter de trouver ce raisonnement dans les cas calculables, "afin de frayer le chemin pour mettre en usage ce même raisonnement, lorsque l'équation proposée sera d'un plus haut degré".⁷⁴ Cette fois il faut bien parler d'un style eulérien, avec le jeu de l'expérience sur les objets mathématiques, publiquement tournés et retournés

⁶⁹Euler, 1749, p.99.

⁷⁰Le calcul est facile à faire : il y a $2^n - 1$ coefficients indéterminés, y compris u , pour $2^n - 1$ équations provenant de l'identification aux coefficients du polynôme unitaire de degré 2^n .

⁷¹Euler, 1749, p. 102.

⁷²Euler, 1749, p. 101.

⁷³Voir l'article 8 de la dissertation de Gauss, d'ailleurs fourni dans les œuvres d'Euler à la suite de son article.

⁷⁴Euler, 1749, p. 97.

dans tous les sens.⁷⁵

Le passage à une autre méthode est donc justifié pour de Foncenex. Il utilise une autre combinatoire impliquant une récurrence, avec une cascade d'équations du second degré. Elle avait d'ailleurs déjà été envisagée par Euler, au numéro 5 de son article,⁷⁶ dans le cas du degré 6, nombre qui n'est pas une puissance de 2. Malheureusement, l'analyse en général de ces équations s'avère insuffisante pour assurer la réalité d'une racine, car traîne encore des termes imaginaires non réduits à la forme d'un nombre complexe. Nous allons voir comment Laplace récupère cette situation, et ce sera l'occasion de parler d'un autre genre d'exposé mathématique.

4. Comment rafler toute la mise, ou la rhétorique du succès par le genre de la leçon

Laplace, contraint de donner des cours publics quelques mois après la chute de Robespierre, et surveillé par une Convention thermidorienne encore jacobine et dont l'idéologie est devenue l'analytique d'un progrès intellectuel indéfini, choisit de démontrer de façon la plus concise possible le théorème d'Euler.⁷⁷ Il le fait exactement dans les termes de facteurs réels du second degré pour un polynôme de degré pair. On a vu que cette façon évitait les quantités imaginaires. On peut parler bien sûr de rigueur, mais c'est une qualification peu historique. Le style choisi par Laplace appartient à un genre : c'est celui de la leçon, et elle se ressent des nécessités de l'oral. L'analytique doit s'entendre ! D'autant que la preuve fournie est un résumé de tout ce qui est vraiment utile en algèbre polynomiale. En termes de sociologie des sciences à la Bourdieu, on dirait que Laplace rafler toute la mise algébrique depuis Euler dans l'exposé des quantités imaginaires. C'est d'ailleurs ce que Lagrange suggère, trois années plus tard, attribuant l'idée de Laplace à de Foncenex, qui nous l'avons vu, suivait Euler.⁷⁸ Si l'influence d'Euler est indéniable, la question n'en est pas moins de juger si l'autorité de ce dernier, par l'orientation d'une méthode vers les quantités imaginaires issues des valeurs des fonctions, est encore présente chez Laplace. Un an après la démonstration exposée par Laplace, Jean-Baptiste Labey insère celle-ci dans la traduction fameuse qu'il fait de l'*Introductio* d'Euler, forgeant ainsi une postérité eulérienne chez Laplace.⁷⁹ Je préfère en juger aujourd'hui en parlant du genre de la leçon.

⁷⁵Jean Dhombres, Sur un texte d'Euler relatif à une équation fonctionnelle : archaïsmes, pédagogie et style d'écriture, *Sciences et techniques en Perspective*, vol. 8, 1985, pp. 1-55.

⁷⁶Euler, 1749, p. 108.

⁷⁷La leçon de Laplace du 11 Germinal an III est aussitôt publiée en feuilles séparées. Toutes les leçons de l'Ecole normale de tous les professeurs sont réunies en plusieurs volumes en 1795, et une nouvelle édition a lieu en 1800. Les leçons des seuls mathématiciens sont réunies en une édition critique en 1992 (Jean Dhombres (éd.), *L'Ecole normale de l'an III. Leçons de mathématiques, Laplace, Lagrange, Monge*, Paris, Dunod, 1992). C'est ce texte qui sera référé ici par Laplace, 1795. Voir aussi Ivor Grattan-Guinness, *Convulsions in French Mathematics, 1800-1840*, Birkhäuser Verlag, Basel/Boston/Berlin, 3 vol., 1990; Jesper Lützen, *The Prehistory of Distribution Theory*, Springer Verlag, New York, Heidelberg, Berlin, 1982.

⁷⁸Joseph-Louis Lagrange, *Traité de la résolution des équations numériques de tous les degrés*, Paris, 1798, 2^e édition, 1808, Note II, n° 16, p. 108.

⁷⁹*Introduction à l'analyse infinitésimale, par Léonard Euler, trad. fr. et notes de J.B. Labey*, Paris, Barrois l'aîné an IV (1796).

Laplace évite en effet d'entrer dans une quelconque discussion sur la nature des quantités imaginaires, et reste dans la sémantique polynomiale de ce que nous avons appelé la première partie de l'article d'Euler. Il se débarrasse aussi des tares des démonstrations que de Foncenex avait su si bien relever chez Euler. N'oublions pas les conditions de l'exposé par Laplace qui doit apparaître entièrement dégagé des hésitations historiques. Ce qui ne veut pas dire qu'il soit hors histoire. C'est la méthode analytique née avec Descartes qui est créditée de succès, et c'est bien la méthode des indéterminées de Descartes qui est à la base du texte d'Euler. Laplace en fait une leçon et le commentaire qu'on peut en donner détruit son style en le rythmant par l'histoire plus précise et plus proche aussi. Ainsi de dire que Laplace revient à peu près au théorème sous la forme prise par Euler, empêche de voir que le théorème est devenu équilibré, la parité répondant stylistiquement au second degré des facteurs cherchés.

Toute équation d'un degré pair est résoluble en facteurs réels du second degré.⁸⁰

Chez Euler, il fallait diviser le polynôme par deux, et du coup on avait la nécessité de prendre des degrés en puissances de 2. Bien sûr, le mot "résoluble" qui fait la rhétorique de la leçon de Laplace, a d'abord un sens purement mathématique, celui d'un produit de facteurs. Il peut même sous-entendre la récurrence que Laplace va établir, le premier à agir ainsi pour ce théorème alors que les prédécesseurs décomposaient une situation en cas de degrés successivement abaissés.⁸¹ La récurrence porte sur la puissance de 2 que contient le degré n du polynôme P , soit $n = 2^k s$, où s est un nombre entier impair. Mais là encore, en la commentant ainsi, on casse l'effet de la leçon de Laplace. Car il ne parle pas de récurrence ou d'induction. Il la fait. A cette époque, on n'avait pas formalisé le principe d'induction. Il est difficile de ne pas penser à une copie du style d'Euclide dans la partie conclusive du texte de Laplace.

Toute équation du degré $n = 2^i s$ a donc un facteur réel du deuxième degré si toute équation du degré $n = 2^{i-1} s'$ a un facteur semblable. Par la même raison, toute équation du degré $n = 2^{i-1} s'$ a un facteur réel du deuxième degré si toute équation du degré $n = 2^{i-2} s''$ a un facteur semblable, s'' étant un nombre impair. En continuant ainsi jusqu'à l'équation de degré $2k$, k étant impair, équation qui, comme on vient de le voir, a nécessairement un facteur réel du deuxième degré, on voit, en rétrogradant, que toute équation du degré $n = 2^i s$ a un facteur⁸² réel du deuxième degré. Donc, toute équation d'un degré pair a un facteur du deuxième degré : en la divisant par ce facteur on aura une nouvelle équation d'un degré pair, qui aura elle-même un facteur réel du deuxième degré, et en continuant ainsi on décomposera l'équation entière en facteurs réels du deuxième degré.⁸³

Coquetterie épistémologique, dans cette conclusion absolument convaincante, Laplace se garde de parler d'imaginaires et donc de leur nature. Mais il fait voir des facteurs réels du second degré, donc le seul cadre de l'algèbre polynomiale réelle. N'est-ce pas dire qu'il n'est concerné que par les nombres complexes en tant qu'ils sont les

⁸⁰Laplace, 1795, p. 79.

⁸¹Euler avait bien mentionné au numéro 76 de son article une récurrence, mais elle porte sur la forme des racines.

⁸²Laplace, ou le transcripteur de la leçon, a omis de qualifier ce facteur de réel.

⁸³Laplace, 1795.

imaginaires algébriques du second degré, dont la forme est une dépendance en deux nombres réelles seulement ?

Aussi bien il y a deux étapes dans la récurrence. La première est celle où $i = 1$, et l'on doit montrer qu'un polynôme de degré $2k$, k impair, a un facteur réel du second degré. S'il avait commencé avec $i = 0$, avec un polynôme de degré impair, il aurait comme Euler mis en évidence le rôle tutélaire du théorème qui ne relève pas du mode démonstratif algébrique et qui assure qu'un tel polynôme possède au moins une racine réelle. Mais la récurrence doit porter sur les facteurs réels du second degré. C'est donc bien avec le cas du degré $2k$ que Laplace commence. Avec tout ce qui précède, l'on sera quand même surpris de constater combien il est facile de suivre cette démonstration brillante. Mais n'est-ce pas cela une "leçon" ?

Laplace ne peut éviter les quantités imaginaires, ces quantités sans signe selon Euler, et impose à ces imaginaires trois des opérations de l'arithmétique, l'addition la soustraction et la multiplication, pour avoir les fonctions symétriques élémentaires exprimées par les coefficients réels du polynôme. Ce sont donc les "lettres" a, b, c , etc., pour reprendre l'expression utilisée par Euler. Laplace groupe par deux ces "lettres", en utilisant de plus un paramètre réel, noté m par Laplace, mais que je vais prendre comme M pour éviter une confusion avec les racines a, b, c , etc. Il envisage les quantités $a + b + Mab$. Ces imaginaires disparaissent aussitôt sous la forme du polynôme Q qui les a pour racines. Le degré N de Q est le nombre possible de paires non ordonnées des racines, soit $N = n(n - 1)/2$, et lorsque $n = 2k$, N vaut $k(2k - 1)$, qui est toujours un nombre impair puisque k l'est par hypothèse. Euler et de Foncenex avaient utilisé la même propriété combinatoire. Mais Laplace ne rencontre pas la difficulté de ses prédécesseurs, qui est d'assurer que les coefficients du polynôme Q sont réels. Car cette réalité est assurée par un théorème dû à Lagrange. Ce théorème porte sur les fonctions polynomiales symétriques de n variables,⁸⁴ et les exprime comme une fonction polynomiale réelle des fonctions symétriques élémentaires, c'est-à-dire des coefficients réels du polynôme P . Or les coefficients du polynôme Q sont des fonctions symétriques des n racines du polynôme P , d'où la preuve de leur réalité. Aussi bien, le polynôme réel Q , parce qu'il est de degré impair, a au moins une racine réelle. Donc on peut choisir a , et b , racines de P et $a + b + Mab$ est une quantité réelle. Puisqu'on a pu faire ce choix pour tout réel M , on a défini une fonction φ de l'ensemble infini des réels dans l'ensemble fini des couples de racines de P . Cette fonction, compte tenu de son domaine de départ et de son domaine d'arrivée, ne peut être injective, de sorte que pour deux valeurs différentes M et M' , mais pour le même couple de racines a et b , on a à la fois les quantités $a + b + M'ab$ et $a + b + Mab$ réelles. Ce qui donne les quantités $a + b$ et ab à leur tour réelles, donc la mise en facteur dans P du polynôme réel $x^2 - (a + b)x + ab$. La première étape de la récurrence est acquise.

L'étape générale de la récurrence, et nous l'avons déjà lue avec les mots mêmes de Laplace, est de passer du fait que toute équation du degré $n = 2^{i-1}s'$ a un facteur

⁸⁴Le passage de polynômes à une variable (objet du théorème fondamental de l'algèbre) à des polynômes de plusieurs variables (objet utilisé par la démonstration de Lagrange) n'est pas lisible à l'époque par un même vocabulaire. On parle de fonctions entières pour le polynôme à une variable, mais de fonction rationnelle pour un polynôme à plusieurs variables.

réel du second degré à la même propriété pour le degré $n = 2^i s$. De la même façon en groupant les racines par deux avec un paramètre réel M , on passe d'un polynôme P à un polynôme Q , et le degré de Q est de la forme $n = 2^{i-1} s'$ si le degré de P est $n = 2^i s$. En interprétant les facteurs réels du second degré en termes de complexes, cela revient à dire avec l'existence d'une même fonction φ , qu'il existe un couple de racines pour lequel $a + b$ comme ab sont complexes. En résolvant dans les complexes une équation du second degré à coefficients complexes, on en déduit que a et b sont complexes.⁸⁵ Il suffit d'une seule racine complexe. Car, si la racine a est une racine complexe non réelle de P , qui est un polynôme réel, sa conjuguée l'est aussi et dès lors on a bien un facteur réel du second degré pour P . Mais si la racine a est réelle, on a le facteur $(x - a)$ pour P et le polynôme quotient, réel, est de degré impair. Ce qui assure une autre racine réelle, les deux facteurs produisant un facteur réel du second degré, et cette partie de la récurrence est terminée.

L'invention de Laplace, avec l'usage du résultat de Lagrange sur les fonctions symétriques qui fournit sans calcul une propriété de stabilité dans le corps des réels, est la conception de la fonction φ pour laquelle aucun calcul n'est utile. Le théorème s'en déduit presque d'un coup. En France, cette preuve est typique d'une leçon d'agrégation. Qu'est devenue pourtant notre question de l'autorité d'Euler sur Laplace ? Il nous faut terminer par un retour sur Euler et son style.

5. Conclusion : le style eulérien

On a pu constater l'avantage d'une mise en perspective des rhétoriques d'exposition sur les trois exemples choisis, Euler en 1749, de Foncenex en 1761 et Laplace en 1795, tous les trois autour de la question de la nature des quantités imaginaires et refusant l'appellation de quantités impossibles. Même s'il fallut accentuer un peu les choses pour dégager le genre académique et le genre de la leçon. Sous prétexte d'étude littéraire, on n'avait pas à omettre les enjeux épistémologiques, que ce soit avec la rhétorique de l'insuffisance de l'algèbre chez Euler qui n'en fait pas moins autorité, avec la rhétorique de la difficulté à s'élever au dessus des calculs chez de Foncenex, ou encore avec la rhétorique du "tout est dit qui devait être dit" de la leçon de Laplace.

On peut revenir en conclusion sur la question posée en introduction d'une insuffisante analyse littéraire des textes mathématiques, notamment ceux présentés de façon moins paradoxale que créative, comme lorsqu'il s'agit des quantités imaginaires. D'autant que la langue des Lumières ne nous a pas habitués à manier des paradoxes sans les résoudre. On a bien lu au tout début la définition que donnait d'Alembert des quantités imaginaires dans l'*Encyclopédie*. Cette résolution est une forme d'autorité. Quelle est au fond la résolution d'Euler ? Peut-être alors n'a-t-on pas assez remarqué que, dès son introduction, Euler annonçait ses intentions d'une façon problématique.

⁸⁵J'ai en fait simplifié la démonstration de Laplace car il ne travaille pas avec les racines d'une équation du second degré à coefficients complexes. Aussi, fait-il intervenir un facteur du second degré à coefficients complexes, en prend le conjugué, et doit assurer que le produit qui est réel et de degré 4 se factorise bien. Il lui faut ensuite faire fond sur le théorème de décomposition d'une équation de degré 4 en deux facteurs réels du second degré, ce qu'Euler avait déjà montré dans son article de 1749.

Elles étaient, nous l'avons vu, d'expliquer ce qu'implique le caractère déterminable d'un calcul lorsque l'on considère une fonction comme un calcul. Or, dès qu'Euler a énoncé les relations entre les racines imaginaires d'un polynôme de degré n , c'est-à-dire donné les n fonctions symétriques élémentaires, il écrit :

Donc puisque le nombre de ces égalités est $= n$, les valeurs des lettres, $\alpha, \beta, \gamma, \dots, v$ en seront réciproquement déterminées.⁸⁶

Le “donc” d'entrée est lié à la même propriété heuristique de calcul, l'égalité du nombre de données au nombre de conditions les liant, et semble définir la nature algébrique de la détermination des quantités imaginaires qui sont vigoureusement réduites à des “lettres”. Or la détermination ne peut évidemment pas signifier une forme polynomiale de dépendance des racines aux coefficients, ne serait-ce que parce que cette assertion rendrait inutile l'article du Bâlois. Il y a une dépendance, mais c'est la nature analytique de celle-ci qui est en balance au long de l'article. Elle aboutit à la forme fonctionnelle. Si l'on ne veut pas gommer l'effet rhétorique de l'introduction de ce texte, en le faisant passer pour une maladresse d'un écrivain peu conséquent, si on lui fait jouer jusqu'au rôle de signifier ce qu'il reste de “vague” métaphysique dans une pensée, force alors est de redonner une unité stylistique à ce texte que nous avons divisé en deux parties. On avait certes bien vu que la première ne faisait que préparer la seconde. Mais le scholie final, introduit nous l'avons vu par une formulation étrange — “soutenir sans balancer” —, résout la question de la dépendance posée en introduction. La réponse est une question de nature : les quantités imaginaires, algébriques ou non, dépendent de deux paramètres réels.

Elles sont toujours composées de deux nombres dont l'un est réel, et l'autre une quantité réelle multipliée par $\sqrt{-1}$.⁸⁷

Tout ce long article en 124 numéros concourt à ce résultat, qui peut être considéré comme la fondation ontologique des complexes, ce que j'ai appelé en introduction une création. La voie d'obtention n'est pas directe, mais une exploitation de divers calculs, algébriques ou non, plus ou moins reliés entre eux, et qui forment faisceau. C'est une floraison de points de vue qui se recoupent, ou se justifient les uns les autres, pour aboutir à la réduction de toutes les quantités imaginaires. Cette redondance est un style, mais il est mené par une pensée fixe qu'il subsiste un doute. S'il y a effervescence analytique, c'est bien qu'une seule voie n'est pas convaincante. Comment se fait-il alors que l'on ait pu parler d'une rhétorique de l'autorité ? La critique n'est-elle pas venue comme nous l'avons vu par de Foncenex ? Mais on pourrait aussi bien mentionner Lagrange. L'autorité réside dans le fait d'avoir dévié le problème de sa forme algébrique (racines imaginaires des polynômes) vers la forme à deux paramètres des imaginaires en général, considérées comme valeurs de fonctions. La réussite de la solution de Laplace au moyen d'une fonction disant seulement une dépendance sans qu'un calcul soit nécessaire, justifie Euler, fonctionnellement pourrait-on dire, et dément de Foncenex qui craignait la difficulté de s'élever au-dessus des calculs et le risque d'erreur.

⁸⁶Euler, 1749, p. 80.

⁸⁷*Idem.*

La réussite de Laplace fait néanmoins disparaître l'autorité du texte d'Euler. Mais pour une autre raison, typique de la démarche mathématique. Désormais, la question de la nature des imaginaires étant résolue, il faut la poser autrement pour inventer à nouveau. Il faut se débarrasser de la supposition cartésienne de l'existence même des quantités imaginaires, les oublier en quelque sorte, et cesser de les prendre pour des fictions nécessaires du calcul. Tel est effectivement le propos de Carl-Friedrich Gauss, quatre ans après la preuve fournie par Laplace.

AMS Subject Classification : 01A50, 00A35, 26C05.

Jean DHOMBRES, Groupe de recherche sur les savoirs, EHESS, Paris, FRANCE
e-mail : jean.dhombres@damesme.cnrs.fr

Lavoro pervenuto in redazione il 31.10.2005.